פונקציות אינטגרביליות

סימונים וקיצורים

f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$.

$P: x_0 < \cdots < x_k$ חלוקה של הקטע $[a,b]$.

לכל $1 \le i \le k$:

$$\beta_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad , \quad \alpha_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$\bar{s}(P) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \beta_i \quad , \quad \underline{s}(P) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \alpha_i$$

$$\omega_i \coloneqq \beta_i - \alpha_i$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{s}(P) - \underline{s}(P) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \omega_i$$

קריטריון רימן לאינטגרביליות

התכונות הבאות שקולות:

1. f אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$.
2. f חסומה בקטע $[a,b]$ ו - $\lim_{\lambda(P)\to 0} \bar{s}(P) - \underline{s}(P) = 0$.
3. f חסומה בקטע $[a,b]$ וקיימת סדרת חלוקות P_n עם $\lambda(P_n) \to 0$ כך ש:
$\lim_{n\to\infty} \bar{s}(P) - \underline{s}(P) = 0$.

מסקנה

אם f רציפה בקטע $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

הוכחה

f רציפה בקטע סגור, לכן היא רציפה במידה שווה שם.

יהי $0 < \varepsilon$.

ניקח $0 < \delta$ כך שלכל $x, y \in [a,b]$ כך ש: $|x-y| < \delta$, מתקיים: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

נניח $\lambda(P) < \delta$.

לכל $1 \leq i \leq k$, אורך הקטע $[x_{i-1}, x_i] > \delta$.

לכן, לכל $x_{i-1} \leq x, y \leq x_i$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f רציפה בקטע $[x_{i-1}, x_i]$, לכן עפ"י משפט ויירשטרס מקבלת מקסימום (בנקודה c_1) ומינימום (בנקודה c_0) שם. אז:

$$\omega_i = \beta_i - \alpha_i = f(c_1) - f(c_0) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot \omega_i < \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = (b-a) \cdot \varepsilon$$

לכן, מתקיים התנאי (2) בקריטריון רימן.

פורמלית, בהנתן $\varepsilon > 0$, נתחיל עם $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{b-a}$, ואז:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot \omega_i < (b-a) \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$$

■

מסקנה

תהי f פונקציה מונוטונית בקטע $[a, b]$. אזי f אינטגרבילית שם.

הוכחה

נוכיח עבור פונקציה עולה (במובן החלש). ההוכחה עבור המקרה השני דומה.

תהי P חלוקה.

תחילה, f חסומה. הרי:

$$\forall a \leq x \leq b : f(a) \leq f(x) \leq (b)$$

אז:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot (\beta_i - \alpha_i)$$

הפונקציה עולה, לכן:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot \omega_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(P) \cdot \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \lambda(P) \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$$

לכן:

$$\lambda(P) \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot \omega_i \to 0$$

כיסויים פתוחים וקבוצות אפסיות

הגדרה

כיסוי פתוח של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ הוא אוסף קטעים $\{(a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in I\}$ שאיחודם מכיל את A:

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$$

דוגמה

$\{(x-1, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$ כיסוי פתוח של $\mathbb{R}$, שכן:

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x-1, x+1)$$

הגדרה

תת כיסוי סופי של כיסוי פתוח של $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{(a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in I\}$, הוא מספר סופי של קטעים מהכיסוי המכסה את A, כלומר קטעים $(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}), \cdots, (a_{\alpha_k}, b_{\alpha_k})$, עבור $k \in \mathbb{N}$ ו - $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ כך ש:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$$

הערה

לכיסוי הנ"ל של $\mathbb{R}$ <u>אין</u> תת כיסוי סופי.

משפט (היינה בורל)

לכל כיסוי פתוח של קטע סגור $[a, b]$ יש תת כיסוי סופי.

הוכחה

נגדיר: $\phi \neq A \coloneqq \{x \in [a, b] :$ לקטע $[a, x]$ יש תת כיסוי סופי$\}$ וחסומה מלעיל

הרי, ניקח קטע $a \in (a_\alpha, b_\alpha)$. אז: $a < x < b_\alpha$, ואז $[a, x] \subseteq (a_\alpha, b_\alpha)$, לכן $x \in A$.

בנוסף, לכל $x \in A$: $x \leq b$.

לכן: $b_0 \coloneqq \sup A \leq b$ קיים.

נניח כי $b_0 < b$.

ניקח קטע $b_0 \in (a_\alpha, b_\alpha)$.

$a_\alpha < b_0 = \sup A$, לכן קיים $a_0 < x \in A$.

$x \in A$, לכן קיים תת כיסוי סופי לקטע $[a, x]$.

נקבע $b_0 < c < b_\alpha$. אז, הוספת הקטע (a_α, b_α) לתת הכיסוי הסופי של $[a, x]$ נותנת תת כיסוי סופי של $[a, c]$, לכן: $\sup A = b_0 < c \in A$. סתירה.

לכן $b_0 = b$.

הטיעון הקודם מראה שאם ניקח קטע המכיל את $b_0 (= b)$, וניקח $A \ni x < b_0$ בקטע, אז ל - $[a, x]$ יש תת כיסוי סופי, ויחד עם הקטע שלקחנו עבור b, נכסה את $[a, b]$.

■

הגדרה

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא **אפסית** (או **ממידה** אפס) אם לכל $0 < \varepsilon$, יש כיסוי פתוח סופי או בן מניה:

$$A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n)$$

ע"י קטעים שסכום אורכיהם קטן ε. כלומר:

$$\sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon$$

דוגמה

$\{x\}$ קבוצה אפסית, שכן: $\{x\} \subseteq \left(x - \frac{\varepsilon}{4}, x + \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

דוגמה

$\mathbb{Q}$ קבוצה אפסית. למעשה, כל קבוצה בת מניה היא אפסית.

הוכחה

נכתוב $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

יהי $0 < \varepsilon$.

לכל $n \in \mathbb{N}$, ניקח קטע באורך $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ המכיל את x_n.

סכום אורכי הקטעים כולו הוא:

$$\sum_{n}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon\cdot\sum_{n}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\varepsilon}{2}$$

הערה

יש קבוצות אפסיות מעוצמת הרצף (ראה קבוצת קנטור).

למה

איחוד של מספר בן מניה של קבוצות אפסיות הוא אפסי.

$$A=\sum_{n\in\mathbb{N}}A_n$$

הוכחה

יהי $0<\varepsilon$.

נקבע $n\in\mathbb{N}$. לקבוצה A_n יש כיסוי פתוח ע"י קטעים שסכום אורכיהם קטן מ - $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

אז, סכום אורכי הקטעים כולם קטן מ - $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\sum_{n}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

קיבלנו איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה של קטעים, ובסה"כ קבוצה בת מניה של קטעים פתוחים. נסדרם בסדר כלשהו: $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots$.

אז, לכל $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\leftarrow\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

■