נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

$$\underline{y'' - y = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1}$$

במקום לעשות 3 שלבים מתישים, נפעיל התמרת לפלס בשני האגפים ונקבל:

$$[s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)] - Y = \frac{1}{s}$$

$$(s^2-1)Y - 1 = \frac{1}{s}$$

$$(s^2-1)Y = \frac{1}{s} + 1 = \frac{1+s}{s}$$

$$\Longrightarrow Y = \frac{1+s}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$\Longrightarrow Y = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = e^t - 1}$$

דוגמה

$$\underline{y'' - 5y' + 6y = 8e^t, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1}$$

$$[s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)] - 5[sY - y(0)] + 6Y = \frac{8}{s-1}$$

$$Y(s^2-5s+6) - 3s + 16 = \frac{8}{s-1}$$

$$\Longrightarrow Y(s^2-5s+6) = \frac{8}{s-1} + 3s - 16$$

$$Y = \frac{8}{(s-1)(s^2-5s+6)} + \frac{3s-16}{s^2-5s+6}$$

$$= \frac{8}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \frac{3s^2-19s+16}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$$= \frac{4}{s-1} + \frac{2}{s-2} - \frac{3}{(s-3)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = 4e^t + 2e^{2t} - 3e^{3t}}$$

דוגמה

$$\begin{cases} y_1' + y_1 + 2y_2 = e^{2t} \\ y_2' + 2y_1' - y_1 = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

נפעיל לפלס:

$$\begin{cases} s\,Y_1 + Y_1 + 2Y_2 = \dfrac{1}{s-2} \\ s\,Y_2 + 2s\,Y_1 - Y_1 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$Y_2 = \frac{1-2s}{s} Y_1$$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל:

$$(s+1)Y_1 + 2\left(\frac{1-2s}{s}\right)Y_1 = \frac{1}{s-2}$$

$$Y_1\left(\frac{s^2-3s+2}{s}\right) = \frac{1}{s-2}$$

$$Y_1 = \frac{s}{(s-2)(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{s}{(s-2)^2(s-1)}$$

$$= \frac{2}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1}$$

$$Y_2 = \frac{1-2s}{(s-2)^2(s-1)} = -\frac{3}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= 2te^{2t} - e^{2t} + e^t \\ y_2(t) &= -3te^{2t} + e^{2t} - e^t \end{aligned}}$$

דוגמה

חישוב $\mathcal{L}[J_0]$ עבור תנאי התחלה $J_0(0) = 1\ ; J_0' = 0$:

שימו לב, J_0 פותר את משוואת בסל:

$$xJ_0'' + J_0' + xJ_0 = 0$$

נפעיל לפלס:

$$\mathcal{L}[xJ_0''] + \mathcal{L}[J_0'] + \mathcal{L}[xJ_0] = 0$$

נסמן: $g := \mathcal{L}[J_0]$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(s^2 g(s) - s) + s \cdot g(s) - g'(s) = 0$$
$$\Rightarrow -s^2 g'(s) - 2sg(s) + 1 + sg(s) - g'(s) = 0$$
$$\Rightarrow -(s^2+1)g'(s) = s \cdot g(s)$$
$$\Rightarrow \frac{g'(s)}{g(s)} = -\frac{s}{s^2+1}$$
$$\Rightarrow \log g(s) = -\int \frac{s}{s^2+1} ds \underset{du=2sds}{\overset{u=s^2+1}{=}} -\frac{1}{2}\log(s^2+1) + C$$
$$\Rightarrow g(s) = C \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

נותר לחשב את הקבוע.

משפט

אם f רציפה ב – 0 אזי:

$$\lim_{s\to\infty} s \cdot \mathcal{L}[f](s) = f(0)$$

הוכחה

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$s \cdot \mathcal{L}[f](s) = \underbrace{\int_0^\varepsilon s \cdot f(t)e^{-st}dt}_{f(0)\cdot(1-e^{-s\varepsilon})} + \underbrace{\int_\varepsilon^\infty s \cdot f(t)e^{-st}dt}_{\le \sup|f|\cdot\int_\varepsilon^\infty se^{-st}dt \lesssim e^{-s\varepsilon}\to 0}$$

דוגמה

נחזור למציאת הקבוע בדוגמה הקודמת.

$$\lim_{s\to\infty} s \cdot g(s) = C \cdot \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = C$$

– סוף הקורס –