פתרון הבוחן

14 בדצמבר 2014

1. א. החלק הסטנדרטי של a הוא המספר הממשי אשר המרחק בינו לבין a הוא אינפיניטיסימלי.

ב. $\lim_{x\to a^+} f(x) = st f((x+\Delta x))$ כאשר Δx

ג. מס' היפר ממשי שאינו אינסופי, כלומר, יש מס' ממשי שגדול ממנו ומס' ממשי שקטן ממנו.

ד. $y=f(x)$ היא פו' הפיכה אם קיימת g, כך של־ $x=g(y)$ ו$y=f(x)$ יש את אותו גרף.

2. א.

1. $$st\frac{3-\sqrt{b+2}}{b-7} = st\frac{(3-\sqrt{b+2})(3+\sqrt{b+2})}{(b-7)(3+\sqrt{b+2})} = st\frac{9-b-2}{(b-7)(3+\sqrt{b+2})} =$$
$$st\frac{7-b}{(b-7)(3+\sqrt{b+2})} = st\frac{-1}{(3+\sqrt{b+2})} = \frac{-1}{st(3+\sqrt{b+2})} = \frac{-1}{6}$$

$$(\sqrt{H^2+4}-H)H = \frac{H(\sqrt{H^2+4}-H)(\sqrt{H^2+4}+H)}{(\sqrt{H^2+4}+H)} = \frac{H(H^2+4-H^{2})}{(\sqrt{H^2+4}+H)} =$$
$$\frac{4H}{(\sqrt{H^2+4}+H)} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{H}}+1}$$ השוויון האחרון נובע מחלוקת מונה ומכנה בH.

לכן, $$(\sqrt{H^2+4}-H)H = st\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{H}}+1} = \frac{4}{st\sqrt{1+\frac{4}{H}}+1} = \frac{4}{2} = 2$$

ב. $b_1=b+\epsilon$, $a_1=a+\delta$. נרצה להראות שההפרש בין ab וa_1b_1 הוא אינפיניטיסימלי. ובכן, $a_1b_1 = (a+\delta)(b+\epsilon) = ab+a\epsilon+b\delta+\epsilon\delta$ לכן a_1b_1-ab הוא מספר אינפיניטיסימלי כסכום של אינפיניטיסימליים (כאשר $a\epsilon$ ו$b\delta$ אינפיניטיסימליים כמכפלה של סופי באינפי')

3. א. על מנת למצוא נגזרת בנקודה 0 עלינו לחשב $st\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = st\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}$

ובכן, עבור $\Delta x > 0$: $st\frac{|\Delta x| sin(\Delta x)-0}{\Delta x} = st\frac{\Delta x sin(\Delta x)}{\Delta x} = st(sin(\Delta x)) = 0$ כי ידוע ש $sin(0) = 0$ ושסינוס היא פונקציה רציפה (והביטוי שהגענו אליו הוא בדיוק הגבול הימני של סינוס ב0)

ועבור: $\Delta x < 0$: $st\frac{|\Delta x| sin(\Delta x)-0}{\Delta x} = st\frac{-\Delta x sin(\Delta x)}{\Delta x} = st(-sin(\Delta x)) = -st(sin(\Delta x) = -0 = 0$

לכן הפונקציה גזירה בנקודה 0 והנגזרת שלה שווה ל0.

ב. $f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g\ln f}$ ולכן $(f^g)' = (e^{g\ln f})' = e^{g\ln f}\cdot(g\ln f)' = e^{g\ln f}\cdot(g'\ln f + g\frac{f'}{f})$ במקרה שלנו $f = \ln(x^4+2)$ ו $g = sin^2(x)$ ולכן:

$$(f^g)' = e^{sin^2(x)\ln(\ln(x^4+2))}(2sin(x)cos(x)\ln(\ln(x^4+2) + sin^2(x)\cdot\frac{\frac{4x^3}{x^4+2}}{\ln(x^4+2)}$$

ג. $2xy + \frac{dy}{dx}x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx}x + y^3 = 0$

$$\frac{dy}{dx}(x^{2+}3y^2) = -2xy - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy-y^3}{x^2+3y^2}$$

כאשר $y = 1$: $x^2 + x = 2$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = 1, -2$$

בנקודה (1,1): $\frac{dy}{dx} = \frac{-2-1}{1+3} = -\frac{3}{4}$

בנקודה $(-2,1)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{4-1}{4+3} = \frac{3}{7}$

4. א צריך לבדוק רציפות רק ב$x = 6$ (ניתן לראות שבשאר הנקודות הפו' רציפה כמנה, מכפלה, סכום והרכבה של פו' רציפות)

$$st(x) = 6$$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = st\frac{6(\sqrt{x+3}-3)}{x-6} = st\frac{6(x+3-9)}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)} = st\frac{6(x-6)}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}$$

$$= st\frac{6}{(\sqrt{x+3}+3)} = \frac{6}{6} = 1$$

בגלל ש $\lim_{x\to 6^-} f(x) = st\frac{e^{\Delta x}-1}{2\Delta x} = \frac{1}{2}st\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{1}{2}(e^x)'|_{x=0} == \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$x-6=\Delta x \Leftarrow st(x)=6$

קיבלנו גבולות חד צדדיים קיימים ושונים ולכן $x=6$ היא נקודת אי רציפות מסוג ראשון.

ב. $= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

וזה בגלל שידוע שהגבול של $\frac{\sin x}{x}$ ב0 הוא 1.