מועד א' אינפי 3 תשע"ו

10 בפברואר 2016

1.א. נניח שהקבוצה $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה קומפקטית וקשירה.
הוכיחו ש־K היא קטע סגור או נקודה בודדת.
פתרון:
סעיף בדיחתי, נקודות מתנה. לפי היינה בורל, קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}$ היא סגורה וחסומה.
מצד שני, קבוצה קשירה ב־$\mathbb{R}$ היא נקודה בודדת, קטע, קרן או $\mathbb{R}$ כולו; בקיצור, אינטרוול. יש כאן:

$$https://www.math.washington.edu/~morrow/334\_14/connected.pdf$$

הוכחה לטענה הברורה הזו.
אינטרוול שהוא גם סגור וחסום הוא נקודה בודדת או קטע סגור.

ב. נניח ש: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה במחלקה C^1 ונניח שקיים מספר $M>0$ כך שלכל $p\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\|\nabla f(p)\| \leq M$$

הוכיחו ש־f רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}^2$.
פתרון:
תהיינה $x,y\in\mathbb{R}^2$. נגדיר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי:

$$g(t)=f((1-t)x+ty)$$

g גזירה כהרכבת גזירות. לפי משפט הערך הממוצע של לגראנז', קיימת $c\in(0,1)$ עבורה:

$$g'(c)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=f(y)-f(x)$$

לפי כלל השרשרת,

$$g'(c) = \nabla f((1-c)x + cy) \cdot (y-x)$$

לכן:

$$f(y) - f(x) = \nabla f((1-c)x + cy) \cdot (y-x)$$

מאי־שוויון קושי־שוורץ נקבל:

$$\|f(y) - f(x)\| = \|\nabla f((1-c)x + cy)\| \cdot \|y-x\| \leq M \cdot \|y-x\|$$

לכן f מקיימת את תנאי ליפשיץ בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן רבמ"ש בכל $\mathbb{R}^2$.
נוכיח שרציפות לפי ליפשיץ גוררת רציפות רבמ"ש:
נניח ש־f מקיימת את תנאי ליפשיץ עם קבוע K, ויהי $\varepsilon > 0$.
נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ ואז לכל x, y עבורם $\|y-x\| < \delta$:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq K \cdot \|y-x\| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

ולכן f רבמ"ש.

2. חשבו את $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$ כאשר:
$D = \{1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
<u>פתרון:</u>
זו שאלה שהופיעה ככתבה וכלשונה בחוברת.
אני מקווה שכולם פתרו אותה נכונה ללא יוצא מן הכלל.
נסמן $u = x+y, v = x-y$. לכן:

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$$

לכן:

$$|J| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

אנו צריכים ערך מוחלט, ולכן $\frac{1}{2}$.
איך משתנה התחום? נקבל $1 \le u \le 2, |v| \le u$.
לפיכך:

$$\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy = \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{2} dvdu = \int\limits_{1}^{2} \left(\frac{u}{2} e^{\frac{v}{u}} \right)_{v=-u}^{v=u} du = \int\limits_{1}^{2} \frac{u\left(e - \frac{1}{e}\right)}{2} du = \frac{3\left(e - \frac{1}{e}\right)}{4}$$

3. נניח ש: $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ ונניח שבכל $\mathbb{R}^2$ מתקיים $u_{xx} + u_{yy} > 0$. הוכיחו שלפונקציה u לא קיימת נקודת מקסימום מקומי ב$-\mathbb{R}^2$.

<u>פתרון:</u>

נניח בשלילה שקיימת נקודת מקסימום מקומית, p.
אנו יודעים שבנקודה הזו מטריצת ההסיאן:

$$H(p) = \begin{pmatrix} u_{xx}(p) & u_{xy}(p) \\ u_{yx}(p) & u_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

שלילית לחלוטין, כלומר לכל וקטור $v \in \mathbb{R}^2$,

$$v^T H v \le 0$$

בפרט, עבור הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$0 \ge \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx}(p) & u_{xy}(p) \\ u_{yx}(p) & u_{yy}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx}(p) \\ u_{yx}(p) \end{pmatrix} = u_{xx}(p)$$

באופן דומה, עבור הוקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$0 \ge \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx}(p) & u_{xy}(p) \\ u_{yx}(p) & u_{yy}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xy}(p) \\ u_{yy}(p) \end{pmatrix} = u_{yy}(p)$$

ולכן בנקודה p מתקיים: $u_{xx}, u_{yy} \le 0$ בסתירה לכך ש: $u_{xx} + u_{yy} > 0$.
לכן לא קיימת נקודת מקסימם מקומי.

4. מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x,y,z) = xy^2z^3$ בתיבה:

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le x, y, z \le 8\right\}$$

תחת האילוץ $x+y+z=6$.

פתרון:

הלגראנז'יאן היא:

$$L=f+\lambda\left(x+y+z-6\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל–0:

$$\begin{cases} L_x=y^2z^3+\lambda=0 \\ L_y=2xyz^3+\lambda=0 \\ L_z=3xy^2z^2+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-6=0 \end{cases}$$

משתי המשוואות הראשונות נקבל: $y^2z^3=2xyz^3$, כלומר $yz^3\left(y-2x\right)=0$.
באופן דומה, מהמשוואה הראשונה והשלישית נקבל: $y^2z^2\left(3x-z\right)=0$.
מהמשוואה השנייה והשלישית נקבל: $xyz^2\left(2z-3y\right)=0$.
כעת, נחלק למקרים בהתאם להתאפסות המשתנים.
אם כל המשתנים מתאפסים: $x=y=z$, האילוץ לא מתקיים וסתירה.
אם שני משתנים מתאפסים, למשל $x=y=0$, מהאילוץ נקבל $z=6$.
באופן דומה אם $x=z=0$ נקבל $y=6$.
אם $y=z=0$ נקבל $x=6$.
אם $x=0$, אז $y^2z^3=0$ ולכן עוד אחד מהמשתנים מתאפס.
אם $y=0$, מהאילוץ נקבל $z=6-x$.
אם $z=0$,מהאילוץ נקבל $y=6-x$.
אם שלושת המשתנים לא מתאפסים, נקבל את המשוואות:

$$y-2x=0,3x-z=0,2z-3y=0$$

כלומר $z=3x$, $y=2x$. מהאילוץ:

$$x+2x+3x-6=0\Longrightarrow x=1$$

ולכן $y=2,z=3$.
אם כן, קיבלנו את הנקודות:

$$\left(1,2,3\right),\left(x,6-x,0\right),\left(x,0,6-x\right)$$

התחום (בתוך התיבה) סגור וחסום ולכן קומפקטי, ומובטח לנו שהמקסימום והמינימום נמצאים בין הנקודות האלו.
נחשב את ערך הפונקציה בנקודות:

$$f(1,2,3)=54, f(x,6-x,0)=f(x,0,6-x)=0$$

ולכן המקסימום הוא 54 ומתקבל בנקודה $(1,2,3)$.
המינימום הוא 0 ומתקבל בנקודות מהצורה $(x,6-x,0),(x,0,6-x)$.

5. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ על ידי: $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$.
א. הוכיחו ש־f מעתיקה את $\mathbb{R}^2$ על $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
<u>פתרון:</u>
א. שאלה של בדידה. תהי $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
נחפש $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ עבורה: $f(x,y)=(a,b)$. כלומר:

$$\begin{cases} e^x\cos y=a \\ e^x\sin y=b \end{cases}$$

אם $a=0, b>0$, $\cos y=0$. נבחר למשל $y=\frac{\pi}{2}$ ואז $e^x=b$, כלומר $x=\ln b$.
אם $a=0, b<0$, $\cos y=0$. נבחר למשל $y=\frac{3\pi}{2}$ ואז $-e^x=b$, כלומר $x=\ln(-b)$.
באופן דומה, אם $b=0, a>0$, $\sin y=0$. נבחר למשל $y=0$ ואז $e^x=a$ כלומר $x=\ln a$.
אם $b=0, a<0$, $\sin y=0$. נבחר למשל $y=\pi$ ואז $-e^x=a$ כלומר $x=\ln(-a)$.
אם $a\neq 0, b\neq 0$ נקבל: $e^x=\frac{a}{\cos y}=\frac{b}{\sin y}$. לכן: $\tan y=\frac{b}{a}$ כלומר $y=\arctan\frac{b}{a}$.
לכן, $a=e^x\cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right)$. מזהות טריגונומטרית, $\cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$ ולכן:

$$e^x=a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

כלומר $x=\ln\sqrt{a^2+b^2}$. לא חייבים כמובן לזכור את הזהות; אפשר לכתוב:

$$x=\ln\frac{a}{\cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right)}$$

בכל מקרה מצאנו מקור ל־(a,b) והפונקציה אכן על כנדרש.

ב. הוכיחו שלכל $p \in \mathbb{R}^2$ קיימת סביבה S_p שבה f חח"ע.

פתרון:

נוכיח יותר מזה - שלכל $p \in \mathbb{R}^2$ קיימת סביבה S_p שבה f הפיכה (ובפרט חח"ע).

זו שוב שאלה מהחוברת; היעקוביאן היא:

$$|J_f| = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^x \cos^2 y + e^x \sin^2 y = e^x \neq 0$$

ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה הפונקציה הפיכה מקומית בכל נקודה. לכן גם חח"ע מקומית.

ג. הוכיחו ש$-f$ לא חח"ע ב$-\mathbb{R}^2$ כולו.

פתרון:

גם זו שאלה מהחוברת, והיא גם שאלה של בדידה.

מתקיים:

$$f(0,0) = f(0,2\pi)$$

ולכן הפונקציה אינה חח"ע.

6. חשבו $\iiint_D x^2 dxdydz$ כאשר:

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\right\}$$

פתרון:

נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = 1 + r\cos\theta$$

כאשר $(r,\theta,\phi) \in [0,1) \times [0,\pi) \times [0,2\pi)$.

התחום הוא ספירה עם רדיוס 1, ומרכזה בנקודה $(0,0,1)$.

היעקוביאן הוא $|J| = r^2 \sin\theta$. לכן:

$$\iiint\limits_D x^2 dxdydz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} (r\sin\theta\cos\phi)^2 r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 \sin^3\theta \cos^2\phi \, d\phi d\theta dr = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 \sin^3\theta \cdot \frac{\cos 2\phi + 1}{2} d\phi d\theta dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \sin^3\theta \cdot \left(\frac{\sin 2\phi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta dr = \pi \cdot \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \sin^3\theta d\theta dr =$$

כעת:

$$\int \sin^3\theta d\theta = \int \left(1 - \cos^2\theta\right) \sin\theta d\theta = \int \left(t^2 - 1\right) dt = \frac{t^3 - 3t}{3}$$

בעזרת ההצבה $t = \cos\theta$. לכן:

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \left. \frac{\cos^3\theta - 3\cos\theta}{3} \right|_0^\pi = \frac{4}{3}$$

ולכן:

$$\pi \cdot \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \sin^3\theta d\theta dr = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{3}$$

וזהו האינטגרל.