פתרון תרגיל 2 מרוכבות תיכוניסטים תשע"ח

27 במאי 2018

1. בכל אחד מהסעיפים נבדוק האם הגבול קיים.

(א)

$$\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{\overline{z}}{z}-\frac{z}{\overline{z}}=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{\overline{z}^2-z^2}{z\overline{z}}=\lim_{x,y\longrightarrow 0}\frac{x^2-2ixy-y^2-\left(x^2+2ixy-y^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{x,y\longrightarrow 0}\left(-i\frac{4xy}{x^2+y^2}\right)$$

במסלול $x=0$ מקבלים 0 ובמסלול $x=y$ מקבלים $-2i$ ולכן הגבול לא קיים.

(ב)

$$\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{Re\left(z\right)}{\overline{z}}=\lim_{x,y\longrightarrow 0}\frac{x}{x-iy}=\lim_{x,y\longrightarrow 0}\frac{x^2+ixy}{x^2+y^2}$$

במסלול $x=0$ מקבלים 0 ובמסלול $y=0$ מקבלים 1 ולכן הגבול לא קיים.

(ג) מאד דומה לסעיף הקודם:

$$\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{Im\left(z\right)}{\overline{z}}=\lim_{x,y\longrightarrow 0}\frac{y}{x-iy}=\lim_{x,y\longrightarrow 0}\frac{xy+iy^2}{x^2+y^2}$$

במסלול $x=0$ מקבלים i ובמסלול $y=0$ מקבלים 0 ולכן הגבול לא קיים.

2. אנו צריכים להוכיח שמתקיים:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}f\left(z\right)-f\left(z_0\right)=0$$

כעת:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}f\left(z\right)-f\left(z_0\right)=\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}\left(z-z_0\right)$$

נסמן: $h=z-z_0$ ונקבל:

$$=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}\cdot h=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f\left(z_0+h\right)-f\left(z_0\right)}{h}\cdot\lim_{h\longrightarrow 0}h=f'\left(z_0\right)\cdot 0=0$$

כנדרש, מכיוון שהפונקציה גזירה, הגבול השמאלי אכן קיים (ואפשר להשתמש באריתמטיקה).

3. תהי z_0 נקודה כלשהי, ונראה שהגבול המגדיר את הנגזרת לא קיים:

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{Re(z_0+h)-Re(z_0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{Re(h)}{h}$$

בשאלה 1 ראינו שהגבול הזה אכן לא קיים.

4. אולי באינפי 1 או 2 הראתם משהו דומה על פונקציות ממשיות (יש על זה דיבור בספר של מייזלר).

(א) נניח ש־f דיפרנציאבילית ב־z_0 ונוכיח שהיא גזירה ב־z_0. נחשב את הגבול:

$$f'(z_0)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

אחרי שסימנו $h=z-z_0$. מכיוון ש־f דיפרנציאבילית:

$$=\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z_0)+\alpha(z-z_0)+L(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\alpha+\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{L(z)}{z-z_0}=\alpha$$

לפי הנתון על L; הגבול קיים והפונקציה גזירה, ואכן $f'(z_0)=\alpha$.

לצד שני, נניח שהפונקציה f גזירה ב־z_0 ונניח שהיא דיפרנציאבילית ב־z_0. נגדיר את הפונקציה:

$$L(z)=f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)$$

אכן, מתקיים:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{L(z)}{z-z_0}=\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)=0$$

כי הגבול מגדיר את הנגזרת. לכן L היא פונקציה המקיימת: $f(z)=f(z_0)+\alpha(z-z_0)+L(z)$ כנדרש, ולכן f דיפרנציאבילית.

(ב) מכיוון שהפונקציות גזירות הן דיפרנציאביליות, ולפי הסעיף הקודם אפשר לרשום:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+L_1(z)\,,\quad ,g(z)=g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+L_2(z)$$

כאשר: $\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{L_1(z)}{z-z_0}=\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{L_2(z)}{z-z_0}=0$. לכן:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+L_1(z)}{g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+L_2(z)}$$

נזכור ש: $f(z_0)=g(z_0)=0$, נחלק מונה ומכנה ב־$z-z_0$ ונקבל:

$$\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f'(z_0)+\frac{L_1(z)}{z-z_0}}{g'(z_0)+\frac{L_2(z)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

כנדרש.

5. נשתמש בקושי־רימן ובידע שלנו על אריתמטיקה וגזירות של פונקציות אלמנטריות.

(א) נשתמש בקושי־רימן כאשר $u(x,y) = x^3$ ו $v(x,y) = y^3$. ברור שהן דיפרנציאביליות.

$$u_x = 3x^2 \quad u_y = 0$$
$$v_x = 0, \quad , v_x = 3y^2$$

המשוואות יתקיימו כאשר:

$$3x^2 = 3y^2$$

כלומר לאורך הישר $x = y$ והישר $x = -y$. בכל סביבה של נקודה כזו יש נקודות שאינן גזירות (פנים הקבוצה ריק) ולכן הפונקציה לא אנליטית באף נקודה.

(ב) ראינו שהפונקציה $Re(z)$ אינה גזירה באף נקודה. אם f גזירה ב־z_0 נקבל שגם $Re(z) = f(z) - z$ תהיה גזירה באותה נקודה וסתירה, ולכן הפונקציה לא גזירה באף נקודה.

(ג) במקרה זה, $u = x^3 + y^5, v = 0$. משוואת קושי־רימן ייתנו לנו:

$$u_x = 3x^2 = 0 = v_y$$

$$-u_y = -5y^4 = 0 = v_x$$

המשוואות מתקיימות בראשית בלבד; לכן הפונקציה גזירה בנקודה $z = 0$ ולא אנליטית באף נקודה.

(ד) שוב, אם f גזירה בנקודה z_0, מכיוון שהפונקציה e^{17z^2} גזירה בכל נקודה ולא מתאפסת גם הפונקציה $f \cdot e^{17z^2} = \overline{z}$ גזירה ב־z_0, אבל אנו יודעים שהפונקציה $\overline{z}$ אינה גזירה באף נקודה, וסתירה.

לכן גם f אינה גזירה באף נקודה, ובוודאי שאינה אנליטית.

6. אנו צריכים פונקציות u, v דיפרנציאביליות שהפתרונות של משוואות קושי־רימן יהיו בדיוק קבוצת הנקודות $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$. אם משוואות קושי־רימן הן:

$$x^2 + y^2 = 2, \quad , x^2 = y^2$$

קבוצת הפתרונות אכן כזו. לפיכך, נמצא פונקציה f שאלו משוואות קושי רימן שלה. אפשר לרשום:

$$x^2 = 2 - y^2 \quad x^2 = y^2$$

אם נבחר: $u_x = x^2$, נבצע אינטגרציה לפי x ונקבל: $u = \frac{1}{3}x^3 + g\left(y\right)$.
כמו כן, נבחר: $u_y = y^2$, נבצע אינטגרציה לפי y ונקבל:$u = \frac{1}{3}y^3 + h\left(x\right)$. אם כן, משתי המשוואות האלו אפשר להסיק:

$$u\left(x,y\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2$$

מכאן, לפי קושי־רימן:

$$v_y = 2 - y^2 \quad v_x = -x^2$$

ולכן:

$$v\left(x,y\right) = 2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה:

$$f\left(x,y\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + i\left(2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

מתאימה לדרישות.

7. מניסוח התרגיל אפשר להבין שהפונקציות u הן הרמוניות; אפשר כמובן לבדוק זאת. נמצא את v באמצעות קושי־רימן.

(א) משוואות קושי־רימן אחת נותנת:

$$u_x = \left(e^x + xe^x\right)\cos y - e^x y \sin y = v_y$$

נבצע אינטגרציה לפי y:

$$v(x,y) = \int \left(\left(e^x + xe^x\right)\cos y - e^x y \sin y\right) dy$$

בחלקים כפרה:

$$\int y \sin y \mathrm{d}y = -y\cos y + \int \cos y \mathrm{d}y = -y\cos y + \sin y$$

ומכאן:

$$v = \left(e^x + xe^x\right)\sin y + e^x(y\cos y - \sin y) + g\left(x\right) = xe^x \sin y + e^x y\cos y + g\left(x\right)$$

לפי משוואות קושי־רימן השניה:

$$\left(e^x + xe^x\right)\sin y + e^x y\cos y + C'(x) = v_x = -u_y = xe^x \sin y + e^x \sin y + e^x y \cos y$$

לכן:

$$C'(x) = 0$$

ולכן: $g(x) = C$ קבוע. כלומר:

$$v = xe^x \sin y + e^x y \cos y + C$$

כעת, נציג את $f = u + iv$ כפונקציה של $z = x + iy$. אם כן:

$$f(x+iy) = xe^x \cos y - ye^x \sin y + i\left(xe^x \sin y + e^x y \cos y + C\right)$$

נשחק מעט עם הסוגריים:

$$f(x+iy) = xe^x\left(\cos y + i \sin y\right) - ye^x\left(\sin y - i\cos y\right) + Ci$$

C קבוע, ואם נשתמש בהצגה קוטבית:

$$f(x+iy) = xe^x e^{iy} + iye^x\left(\cos y + i \sin y\right) + C = xe^{x+iy} + iye^{x+iy} + C$$

סה"כ:

$$f(z) = ze^z + C$$

(ב) משוואת קושי־רימן אחת נותנת:

$$u_y = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -v_x$$

נבצע אינטגרציה לפי x ונקבל:

$$v = -\frac{y}{x^2+y^2} + g(y)$$

לפי משוואת קושי־רימן השניה:

$$\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + 1 = u_x = v_y = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + g'(y)$$

מכאן, $g'(y) = 1$, ולכן:

$$g(y) = y + C$$

כלומר

$$v = -\frac{y}{x^2+y^2} + y + C$$

כעת, נציג את f באמצעות $z = x + iy$. אם כן:

$$f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2}+x+i\left(-\frac{y}{x^2+y^2}+y+C\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}+x+iy+Ci$$

כלומר:

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}+z+C = z+\frac{1}{z}+C$$