<u>תרגיל</u>: תהי f_n סדרה פונקציות רציפות על הקטע $[0,1]$
הוכח כי הקבוצה:

$$A := \{x \mid f_n(x) \to 0\}$$ מדידה לבג.

<u>הוכחה</u>:
יהי $\varepsilon>0$ נגדיר את סדרת הקבוצות הבאה.

$$\forall n\in\mathbb{N} : \quad E_n^{\varepsilon} := \{x \mid f_n(x) < \varepsilon\}$$

$$x\in A = \{x \mid f_n(x)\to 0\} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N} : \forall k\geq n \quad x\in E_k^{\varepsilon}$$

$$\iff \forall\varepsilon>0 \quad \text{סופית} - \{n \mid x\notin E_k^{\varepsilon}\}$$

$$\iff \forall\varepsilon>0 \quad x\in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n^{\varepsilon}$$

$$\iff x\in \bigcap_{\varepsilon>0}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} E_k^{\varepsilon}\Big)$$

נשים לב כי (מרציפות הפונקציה) לכל n ולכל $\varepsilon>0$ הקבוצה E_n^{ε} פתוחה ב-$\mathbb{R}$
ולכן נוכל להציגה כאיחוד בן מניה של קטעים פתוחים (כפי שהוכחנו בעבר)
ולכן מדידה.
מכאן גם $\underline{\lim}\, E_n^{\varepsilon}$ מדידה (לפי הסגירות של הס-אלגברה לחיתוכים ואיחודים בנ"מ)

כל שנותר להראות כי:

$$(A=)\quad \bigcap_{\varepsilon>0}\underline{\lim}\, E_n^{\varepsilon} = \bigcap_{t\in\mathbb{N}}\underline{\lim}\, E_n^{1/t} \quad (=A)$$

ולכן, שוב, לפי הסגירות של הס-אלגברה לחיתוכים בנ"מ נסיק כי A מדידה לבג.

<u>תרגיל:</u> יהי (X, S, μ) מ"מ, ותהי $(A_n)_{N}$

סדרת קבוצות מדידות-S עבורה מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty .$$

תהי F קבוצת כל האיברים ב-X השייכים לאינסוף קבוצות

בסדרה. הוכיחו כי $\mu(F) = 0$.

<u>הוכחה:</u> $F = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\in N} \bigcup_{n\le k} A_k$,

לפי מה שראינו בתרגול.

כעת, נגדיר סדרה: $F_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

אזי $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

F_n סדרה יורדת של קבוצות, ומתקיים:

$$(*) \qquad \mu(F_n) \underset{\uparrow}{\le} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

σ תת אדיטיביות

זנב של טור מספרים מתכנס.

בפרט, קיים n_0 כך ש- $\mu(F_{n_0}) < \infty$.

כעת, מרציפות המידה:

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$$

לפי (*)

תרגיל: עבור $x \in [0,1)$ נסמן

$$0.x_1x_2x_3\ldots$$

את הספרות בייצוג העשרוני של x. כלומר: $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 10^{-n}$

יהי $n_0 \in \mathbb{N}$. לכל $1 \le k \le n_0$

נתונים: $A_k \subseteq \{0,\dots,9\}$.

נגדיר: $A = \{x \in [0,1) \mid x_k \in A_k\}$

(כלומר עבור האיברים ב-A לכל $1 \le k \le n_0$ הספרה ה-k-ית בפיתוח העשרוני שייכת לקבוצה A_k.

מהי $m^*(A)$?

האם A מדידה לבג ?

פתרון: A הינה איחוד זר של הקטעים מהצורה

$$\{x \mid x_1 = a_1 ;\ x_2 = a_2 ;\ \dots ;\ x_{n_0} = a_{n_0}\} =$$

$$= [0.a_1a_2\dots a_{n_0} ,\ 0.a_1a_2\dots a_{n_0}999\dots]$$

שאורכם 10^{-n_0}.

מספר הקטעים מסוג זה שווה למס׳ האפשרויות לבחור את $a_1,\dots,a_{n_0}$

כך ש- $\forall k \ \ a_k \in A_k$

כלומר - $\prod_{k=1}^{n_0} |A_k| =$ מס׳ הקטעים באיחוד.

A מדידה לבג, כאיחוד (זר) סופי של קטעים.

וכן $m(A) = m^*(A) = \frac{\prod_{k=1}^{n_0} |A_k|}{10^{n_0}}$

לדוגמא: $A = \{x \in [0,1) \mid x_1 = 9,\ x_{13} \in \{0,\dots,4\}\}$

אז: $m(A) = \frac{10^{11} \cdot 1 \cdot 5}{10^{13}} = \frac{1}{20}$

<u>תרגיל:</u> יהי m מידת לבג על $\mathbb{R}$ ויהי $f\in L^1(m)$.

לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר:

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f\,dm$$

הוכח כי F רציפה במ"ש ב $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה:</u> יהי $x\in\mathbb{R}$.

$$\left|F(x)-F(x+\tfrac{1}{n})\right| = \left|\int_{-\infty}^{x} f\,dm - \left(\int_{-\infty}^{x} f\,dm + \int_{x}^{x+\frac{1}{n}} f\,dm\right)\right|$$

$$= \left|\int_{x}^{x+\frac{1}{n}} f\,dm\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x,x+\frac{1}{n}]} f\,dm\right|$$

נגדיר $f_n := \mathbb{1}_{[x,x+\frac{1}{n}]}|f|$

אז $\forall n \quad \underbrace{f_n}_{\text{מדידה}} \le |f| \in L^1(m)$

לכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת.

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dm = \int\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)dm$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[x,x+\frac{1}{n}]}|f| = 0$$

ומכאן ש-

$$\left|F(x)-F(x+1/n)\right| \le \int f_n\,dm \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן F רציפה.

נניח כי F לא רציפה במ"ש כלומר:

$$\exists \varepsilon>0 \quad \forall n \quad \exists x_n : \quad \underbrace{\left|F(x_n+1/n)-F(x_n)\right|}_{\le \int_{x}^{x+\frac{1}{n}} |f|\,dm} > \varepsilon$$

נגדיר סדרה:

$$f_n := \mathbb{1}_{[x_n, x_n+\frac{1}{n}]}$$

אז: $\underbrace{f_n}_{\text{מדידה}} \le |f| \in L^1(m) \quad \forall n$

ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת:

$$\lim \int f_n \, dm = \int (\lim f_n) \, dm$$

טענה: $\lim f_n = 0$

הסבר: אחרת קיים t וסדרות N_{n_k}: $N_{k+1} \subseteq N_k$ $t \in$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int \mathbb{1}_{N_k} f \, dm \right| > \varepsilon$$

ולכן F לא רציפה ב-t בסתירה לנתון שאמר
הראשוני: F רציפה ב-$\mathbb{R}$. לכן $\lim f_n = 0$

מהטענה נקבל

$$\lim \int f_n \, dm = 0$$

אולם לפי בחירת $(x_n)_n$ $\quad \int f_n \, dm \geq \varepsilon > 0 \quad \forall n$

ולכן $\lim \int f_n \, dm > \varepsilon > 0$ וקיבלנו סתירה.

לכן, F רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

תרגיל: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה לבג בעלת מידה סופית.

הוכיחו כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרה סופית של קטעים פתוחים

סופיים וזרים בזוגות $I_1,\dots,I_k$ כך ש-

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \triangle E\right)<\varepsilon$$

(כאשר $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$).

פתרון. יהי $\varepsilon>0$. הראינו כי קיימת G פתוחה: $G\supseteq E$ ו-

$$m(G)<m(E)+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

G פתוחה, ולכן ניתנת להצגה כאיחוד קטעים פתוחים וזרים

(כפי שהוכחנו בעבר): $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

אולם $m(E)<\infty$ (נתון) ולכן $m(G)<\infty$.

לכן הטור $\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$ $(=m(G))$ מתכנס.

(שכן כל I_i הוא קטע סופי).

לכן קיים n כך ש- $\sum_{i=n+1}^{\infty} I_i<\frac{\varepsilon}{2}$ (זנב של טור מספרים מתכנס)

נסמן $G_n:=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$. אזי: $m(G)-m(G_n)=\sum_{i=n+1}^{\infty} m(I_i)<\frac{\varepsilon}{2}$, (2)

נותר להראות כי $m(G_n\triangle E)<\varepsilon$.

ואז $\left.\begin{array}{l} G\supseteq E \\ G\supseteq G_n \end{array}\right\} \Rightarrow$ $m(G_n\setminus E)\le m(G\setminus E)=m(G)-m(E)\overset{(1)}{<}\frac{\varepsilon}{2}$

וכן: $m(E\setminus G_n)\le m(G\setminus G_n)=m(G)-m(G_n)\underset{(2)}{<}\frac{\varepsilon}{2}$

ומכאן ש:

$$m(G_n\triangle E)=m\big((G_n\setminus E)\cup(E\setminus G_n)\big)=m(G_n\setminus E)+m(E\setminus G_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כנדרש.

טענה: יהי $(\mathbb{R}, S_F, \mu_F)$ מרחב מידה סטנדרטי (המתקבל ממשפט קרתאודורי עבור הפונ' F).

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

A מדידה μ_F . אמ"מ קיימים $F_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_n^i$, $E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n^j$

כך ש- $E_n \subseteq A \subseteq F_n \quad \forall n$

וגם $\lim_{n\to\infty} \mu_F(F_n \setminus E_n) = 0$

הסבר: נניח כי A מוכלת בקבוצה קומפקטית.

כיוון ראשון: אם A מדידה, אזי $\mu_F^*(A) = \mu_F(A)$

ומההגדרה - לכל n קיים כיסוי של A ע"י קבוצות אלמנטריות F_n, (= איחוד של קטעים) כך ש-

$$\mu_F(A) > \mu_F(F_n) + \frac{1}{n} \qquad (1)$$

ובאותו אופן עבור A^c: לכל n קיים כיסוי E_n' ע"י קבוצות אלמנטריות E_n' כך ש- $\mu_F(A^c) > \mu_F(E_n') + \frac{1}{n}$. (2)

כעת: נסמן $E_n = (E_n')^c$

אזי $E_n \subseteq A$

ומ- (1)+(2) מקבלים לפי המדידות של A:

$$\mu_F(F_n \setminus E_n) = \mu_F((F_n \setminus E_n)\cap A) + \mu_F((F_n \setminus E_n)\cap A^c)$$
$$\leq \mu_F(A \setminus E_n) + \mu_F(F_n \setminus A) < \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כיוון שני: אם קיימים F_n, E_n כנ"ל, אזי מתקיים:

מדידה כהפרש מדידות.

$E =: \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n := F$ וגם $\mu_F(F \setminus E) = 0$

מכיון שמרחב המידה הוא שלם הרי $A \setminus E$ מדידה (כתת קבוצה של קבוצה מדידה ממידה 0).

ולכן $A = (A \setminus E) \cup E$ מדידה כאיחוד מדידות.

והוכחנו עבור A שמוכלת בקבוצה קומפקטית.

במקרה הכללי, נסמן $A_m := A \cap [m, m+1]$

אזי: $A = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m$

והראינו בעבר ש A מדידה אזי A_m מדידה לכל m

והוכחנו ש- A_m מדידה אזי קיימים F_n^m ו-E_n^m כמו במשפט.

ולכן בסה"כ נסמן $E_n := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} E_n^m \,;\, F_n := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} F_n^m$

A מדידה אזי קיימים F_n ו- E_n כנ"ל.

<u>טענה</u>: תהי E קבוצה מדידה לבג המוכלת בקטע פתוח סופי (a,b).

לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה <u>מדרגות</u> S בעלת התכונות הבאות:

(א) ניתן להציג את S בצורה $S = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{I_i}$

כאשר $(I_i)_{i=1}^{k}$ קטעים פתוחים זרים בזוגות ומוכלים ב (a,b).

(בפרט, $0 \le S \le 1$ ב $\mathbb{R}$, ו- $\{x\in\mathbb{R} \mid S(x)\neq 0\} \subseteq (a,b)$.)

(ב) $m(\{x\in\mathbb{R} \mid S(x) \neq \mathbb{1}_E(x)\}) < \varepsilon$

(ג) $\|\mathbb{1}_E - S\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_E - S|\, dm < \varepsilon$

<u>הוכחה</u>: נתון $E \subseteq (a,b)$ ולכן $m(E) < \infty$, וכפי שהראינו בעבר

קיימת סדרה סופית $I_1,\dots,I_k$ של קטעים פתוחים וזרים בזוגות,

כך שמתקיים עבור $F := \bigcup_{i=1}^{k} I_i$:

(*) $m(E \triangle F) < \varepsilon$

ניתן להניח בה"כ שלכל $1\le i\le k$, $I_i \subseteq (a,b)$. [כיוון ש-

$E \subseteq (a,b) \Rightarrow E \triangle (F \cap (a,b)) \subseteq E \triangle F$

ואז

$$m(E\Delta(F\cap(a,b))) \leq m(E\Delta F) < \varepsilon$$

אולם: $F\cap(a,b)=\bigcup_{i=1}^{k}(I_i\cap(a,b))$ ולכן נוכל להחליף כל I_i ב- $I_i\cap(a,b)$

ונקבל שוב קטעים זרים בזוגות שמקיימים (*) וגם מוכלים ב (a,b).

נגדיר:

$$S := \sum_{i=1}^{k} 1_{I_i}$$

ונראה שהיא מקיימת את הדרוש בטענה:

(א) אכן $I_1,\dots,I_k$ הינם קטעים פתוחים וזרים בזוגות ומוכלים ב (a,b),

וכן:

$$S=\sum_{i=1}^{k} 1_{I_i} = 1_F$$

$\Leftarrow$ $0\leq S\leq 1$, וגם $S(x)\neq 0 \Rightarrow S(x)\in(a,b)$

(ב) מכיון ש- $|1_E-1_F| = 1_{E\Delta F}$ (ובאמת!) נקבל:

$$m(\{x\in\mathbb{R} \mid S(x)\neq 1_E(x)\}) = m(E\Delta F) \underset{(*)}{<} \varepsilon$$

(ג)

$$\|1_E - S\|_{1} = \int_{\mathbb{R}} |1_E - S|\, dm =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1_{E\Delta F}\, dm = m(E\Delta F) \overset{(*)}{<} \varepsilon$$