

### תרגיל 3

1. יהי  $R$  חוג קומוטטיבי. נזכיר כי אוסף האיברים הנלפטנטים בחוג מהווה אידאל. נסמן אותו ב- $I$ . הוכיחו שבחוג המנה  $R/I$  אין נלפטנטים.
2. יהיו  $R_1, R_2$  חוגים. למה איזומורפי  $R_1 \times R_2 / \{0\} \cong R_1 \times R_2$ ? הוכיחו.
3. תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי  $R$  ואידיאל  $I \trianglelefteq R$  כך ש  $R/I$  קומוטטיבי.
4. יהיו  $R_1, R_2$  חוגים, ו  $I_1 \trianglelefteq R_1, I_2 \trianglelefteq R_2$  אידיאלים. כזכור  $I_1 \times I_2 \trianglelefteq R_1 \times R_2$ . הוכיחו ש  $(R_1 \times R_2) / (I_1 \times I_2) \cong (R_1 / I_1) \times (R_2 / I_2)$ .
5. מצאו  $n$  כך ש  $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}[i] / \langle 3 + i \rangle$ . הוכיחו את האיזומורפיזם.
6. יהי  $R$  חוג. נגדיר את המאפיין של  $R$ , מבומן ב  $\text{char}(R)$ , להיות  $n$  אם  $1 + \dots + 1$  פעמים שווה ל-0, ולכן  $n < m$ ,  $\mathbb{N} \ni m$ ,  $1 + \dots + 1$  פעמים לא שווה ל-0. אם אין  $n$  כזה, נגדיר את המאפיין של  $R$  להיות 0. אם המאפיין של  $R$  שונה מ-0, נגיד שלוג יש מאפיין סופי. יהי  $R$  חוג עם מאפיין סופי, ו  $I \trianglelefteq R$ .

(א) הוכיחו ש  $\text{char}(R/I) \leq \text{char}(R)$ .

(ב) הוכיחו שלמעשה,  $\text{char}(R/I) \mid \text{char}(R)$ .