תרגיל 4

1. תהי $A=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עבור $p\notin\mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau=P(\mathbb{R})\cup\{B\subseteq A : |B^c|\leq\aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $A\neq\emptyset,X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

   (ב) יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X,τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

3. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה x_n ו $x\in X$ מתקיים $x_n\to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

4. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau=\{O_n\mid n\in\mathbb{Z}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n=\{n,n+1,n+2,\ldots\}$$

   (א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z},\tau)$ אכן מרחב טופולוגי.

   (ב) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n\in\mathbb{Z}$.

   (ג) האם קיימת סדרה שיש לה גבול יחיד? אם כן, תנו דוגמא. אם לא- הוכיחו.

5. תהי (X,τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה.

   (א) תהי $\{x_n\}\subseteq X$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהבאים:

      i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

      ii. ל$\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

      iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר בX.

(ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \to Y$ פו' רציפה. הוכיחו שf קבועה.

(ג) הוכיחו ש(X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

6. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

7. תהי τ טופולוגיה כלשהי על $\mathbb{R}$, ויהיו $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות (לפי הטופולוגיה τ). הוכיח/הפריכו : $f + g$ רציפה.