תרגיל 13 – לינארית

1. תהי $P=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$. חשבו את P^{20} .

פתרון: נלכסן את המטריצה P . מכיוון שהיא סימטרית, בהכרח ניתן ללכסן אותה.

שלב א': נמצא ע"ע של P ע"י חישוב הפולינום האופייני,

$$|\lambda I-A|==\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1 & \lambda+2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda+2)[(\lambda+2)^2-1]+[-(\lambda+2)-1]-[1+(\lambda+2)]=$$

$$(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4-1)+(-\lambda-2-1)-(\lambda+3)=$$

$$(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+3)+(-\lambda-3)-(\lambda+3)=$$

$$(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+1)-(\lambda+3)-(\lambda+3)=$$

$$(\lambda+3)[(\lambda+2)(\lambda+1)-2]=$$

$$(\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda+2-2)=$$

$$(\lambda+3)(\lambda^2+3\lambda)=$$

$$\lambda(\lambda+3)^2$$

לכן λ ע"ע של P אם ורק אם

$$\lambda(\lambda+3)^2=0$$

$$\lambda_1=0,\lambda_2=-3$$

לכן הערכים העצמיים של P הם: $\lambda_1=0,\lambda_2=-3$

(הריבוי האלגברי של $\lambda_1=0$ הוא 1. הריבוי האלגברי של $\lambda_2=-3$ הוא 2).

שלב ב':נמצא את המרחב העצמי של הע"ע $\lambda_1=0$:

נפתור את המערכת ההומוגנית

$$(0I-P\,|\,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[2R_3+R_1]{2R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

נציב, $z=t$ אזי,

$$II)3y-3t=0\Rightarrow y=t$$

$$I)2x-t-t=0\Rightarrow x=t$$

לכן, המרחב העצמי של $\lambda_1 = 0$ הוא:

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in F \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס למרחב העצמי V_0.

(בפרט, גם הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_1 = 0$ הוא 1, כמו שציפינו)

נמצא את המרחב העצמי של הע"ע $\lambda_2 = -3$:

נפתור את המערכת ההומוגנית

$$(-3I - P \,|\, 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב, $z = t$, $y = s$ אזי,

$$I) - x - s - t = 0 \Rightarrow x = -s - t$$

לכן, המרחב העצמי של $\lambda_2 = -3$ הוא:

$$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} : t, s \in F \right\} = \left\{ s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in F \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס למרחב העצמי V_{-3}.

(בפרט, גם הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_2 = -3$ הוא 2, כמו שציפינו)

שלב ג': $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל F^3 של ו"ע של P.

לכן, המטריצה, $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מטריצה מלכסנת של P ומתקיים:

$$R^{-1}PR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

נמצא R^{-1} באמצעות דירוג:

(לחילופין, יכולנו באמצעות גרם שמידט לעבור מ B לבסיס אורתונורמלי של ו"ע ממנו היינו מקבלים מטריצה R אורתוגונולית וההופכית היתה פשוט המטריצה המשוחלפת).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}R_3]{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-\frac{1}{2}R_3]{R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל את מטריצת היחידה לכן, $R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

כעת, $R^{-1}PR = D$ עבור $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. לכן $P = RDR^{-1}$.

לכן,

$$P^{20} = \left(RDR^{-1}\right)^{20} = \left(RDR^{-1}\right)\left(RDR^{-1}\right)\cdots\left(RDR^{-1}\right) = RD^{20}R^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{20}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{20} \end{pmatrix}^{20}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$3^{20}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$3^{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$3^{19}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. קבעו האם ההעתקות הבאות הן העתקות לינאריות.

2.1 $T: M_{n\times n}(R) \to R$ כך שלכל $A \in M_{n\times n}(R)$, $T(A) = \det(A)$.

פתרון: ההעתקה T אינה הע"ל לכל $n \geq 2$ (עבור $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$ העתקה לינארית, בדומה להעתקת הזהות).

אכן, לכל $n \geq 2$ לכל A בעלת דטרמיננטה שונה מאפס,

$$T(3A) = \det(3A) = 3^n \det(A) \neq 3\det(A) = 3T(A).$$

לכן, T אינה לינארית.

2.2 $T: C^3 \to C^3$ המוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון: : ההעתקה T אינה הע"ל שכן, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.3. $T:C^3\to C^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y-3z\\x+y\\z\end{pmatrix}$.

פתרון: ההעתקה T היא הע"ל, שכן:

לכל $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in C^3$ ולכל $\alpha\in C$ מתקיים:

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}\alpha x_1+x_2\\\alpha y_1+y_2\\\alpha z_1+z_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(\alpha x_1+x_2)+2(\alpha y_1+y_2)-3(\alpha z_1+z_2)\\(\alpha x_1+x_2)+(\alpha y_1+y_2)\\\alpha z_1+z_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha x_1+2\alpha y_1-3\alpha z_1)+(x_2+2y_2-3z_2)\\(\alpha x_1+\alpha y_1)+(x_2+y_2)\\\alpha z_1+z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+2\alpha y_1-3\alpha z_1\\\alpha x_1+\alpha y_1\\\alpha z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+2y_2-3z_2\\x_2+y_2\\z_2\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}x_1+2y_1-3z_1\\x_1+y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+2y_2-3z_2\\x_2+y_2\\z_2\end{pmatrix}=\alpha T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\right)+T\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right)$$

3. הוכיחו את הטענות הבאות:

3.1. אם $T:V\to W$ העתקה לינארית אז $\ker(T)$ הוא תת מרחב וקטורי של V ו $\operatorname{Im}(T)$ הוא תת מרחב וקטורי של W.

הוכחה:

$\ker(T)\subseteq V$. נראה כי $\ker(T)\le V$ באמצעות הקריטריון המקוצר:

א. $T(0)=0$ לכן $0\in\ker(T)$.

ב. אם $v_1,v_2\in\ker T$ אז $T(v_1)=0, T(v_2)=0$ לכן, $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)=0+0=0$ ו $v_1+v_2\in\ker T$.

ג. אם $v\in\ker T$ ו $\alpha\in F$ אז $T(v)=0$ ולכן, $T(\alpha v)=\alpha T(v)=\alpha 0=0$ ו $\alpha v\in\ker T$.

$\operatorname{Im}(T)\subseteq W$. נראה כי $\operatorname{Im}(T)\le W$ באמצעות הקריטריון המקוצרר:

א. $T(0)=0$ לכן $0\in\operatorname{Im}(T)$.

ב. אם $\alpha\in F$ ו $w_1,w_2\in\operatorname{Im}T$ אז קיימים $v_1,v_2\in V$ כך ש $T(v_1)=w_1, T(v_2)=w_2$. אבל $\alpha v_1+v_2\in V$ ומתקיים $T(\alpha v_1+v_2)=\alpha T(v_1)+T(v_2)=\alpha w_1+w_2$ לכן, $\alpha w_1+w_2\in\operatorname{Im}(T)$.

3.2. אם $T:V\to V$ העתקה לינארית אז $\ker(T)\subseteq ket(T^2)$ ו $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq\operatorname{Im}(T)$.

הוכחה:

ראשית, שימו לב כי אם $T:V\to V$ העתקה לינארית אז $T^2=T\circ T$ גם כן העתקה לינארית (אכן, $T^2:V\to V$ היא ההעתקה המתאימה לכל $v\in V$ את $T(T(v))$. מכיוון ש T הע"ל, לכל

$v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in F$ מתקיים

$$T^2(\alpha v_1 + v_2) = T(T(\alpha v_1 + v_2)) = T(\alpha T(v_1) + T(v_2)) = \alpha T(T(v_1)) + T(T(v_2)) = \alpha T^2(v_1) + T^2(v_2)$$

כלומר, גם T^2 היא הע"ל) לכן, המושג של $\ker(T^2)$ מוגדר היטב. (בשביל המוגדרות של $\operatorname{Im}(T^2)$ מספיק שהפונקציה T^2 מוגדרת).

נראה כי $\ker(T) \subseteq ket(T^2)$:

יהי $v \in \ker(T)$ אזי $T(v)=0$ לכן, $T^2(0) = T(T(0)) = T(0) = 0$ ו $v \in \ker(T^2)$. מש"ל.

נראה כי $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$:

יהי $w \in \operatorname{Im}(T^2)$ אזי קיים $v \in V$ כך ש $T^2(v) = w$. כלומר, $T(T(v)) = w$. אבל $T(v) \in V$ לכן, $T(T(v)) = w \Leftarrow w \in \operatorname{Im}(T)$.

4. יהי V מרחב וקטורי ו $U,W \le V$ תתי מרחבים שלו. הוכיחו כי:

4.1.קיימת הע"ל $T: V \to V$ עבורה $\ker(T) = U$.

הוכחה: יהי B בסיס של U. אזי B קבוצה בת"ל המוכלת ב V. לכן, ניתן קיים בסיס B' של V המכיל את B. נגדיר העתקה לינארית $T: V \to V$ באופן הבא:

לכל $b \in B$, $T(b) = 0$

ולכל $b' \in B' \backslash B$ $T(b') = b'$.

מכיוון שהגדרנו את T על בסיס של V, לפי משפט ההגדרה של הע"ל, אכן, הוגדרה העתקה לינארית יחידה.

(שימו לב כי משפט ההגדרה פועל גם עבור מרחבים ווקטוריים עם בסיסים אינסופיים, כך שהעובדה שלא מצויין בשאלה אם V נוצר סופית, לא פוגעת בהוכחה. בדומה, קבוצה בת"ל מוכלת בבסיס גם עבור מרחבים ווקטוריים שאינם נוצרים סופית – למרות שההוכחה לזה אינה במסגרת הקורס. מי שמעדיף, בגלל שהמשפטים האלה לא הוכחו, יכול להניח כי מדובר במרחבים וקטוריים נוצרים סופית).

כעת, נראה כי $\ker(T) = U$:

$\supseteq$: יהי $u \in U$. מכיוון ש B בסיס של U, קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$, $b_1, ..., b_n \in B$ כך ש

$$u = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n$$

אבל, לכל $1 \le i \le n$ $b_i \in B$ לכן, $T(b_i) = 0$ לכן,

$$T(u) = T(\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n) = \alpha_1 T(b_1) + ... + \alpha_n T(b_n) = 0$$

לכן, $u \in \ker(T)$.

$\subseteq$: יהי $u \in \ker(T)$. בפרט $u \in V$. מכיוון ש B' בסיס של V, קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$, $v_1, ..., v_n \in B'$ שונים כך ש

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

אבל, $B' = B \cup B' \backslash B$, לכן, לכל $1 \le i \le n$, $v_i \in B' \Leftarrow v_i \in B$ או $v_i \in B' \backslash B$ (וכן לא ייתכן מצב כי $v_i \in B$ וגם $v_i \in B' \backslash B$ כי $B \cap B' \backslash B = \phi$)

מכיוון שחיבור היא פעולה חילופית, ניתן להניח בה"כ כי עבור $0\le r\le n$ כלשהו, לכל $1\le i\le r$ $v_i\in B$ ולכל $r+1\le i\le n$ $v_i\in B'\backslash B$.

לכן, לכל $1\le i\le r$, $v_i\in B \Leftarrow T(v_i)=0$ ולכל $r+1\le i\le n$ $v_i\in B'\backslash B \Leftarrow T(v_i)$

נראה כי לכל $r+1\le i\le n$ $\alpha_i=0$ (ונקבל כי u הוא צירוף לינארי של איברים מ B שהינו הבסיס של u).

אבל, $u\in\ker(T)$. לכן $T(u)=0$ לכן:

$$T(\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n)=0\Rightarrow$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i+\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i v_i\right)=0\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i T(v_i)+\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i 0+\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i v_i=0\Rightarrow$$

$$\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i v_i=0$$

אבל, $\{v_{r+1},...v_n\}$ בת"ל לכן, לכל $r+1\le i\le n$ $\alpha_i=0$.

לכן, $u=\alpha_1 v_1+...+\alpha_r v_r\in Span(B)=U$. מש"ל

הערה: אם היה נתון שהמרחב הוא ממימד סופי, יכולנו להוכיח את הטענה מעט יותר בקלות:

הוכחה: יהי $B=\{u_1,...,u_m\}$ בסיס של U. אזי B קבוצה בת"ל המוכלת ב V. לכן, ניתן להשלימה לבסיס B' של V. $B'=\{u_1,...,u_m,...u_n\}$.

נגדיר העתקה לינארית $T:V\to V$ באופן הבא:

לכל $1\le i\le m$, $T(u_i)=0$

ולכל $m+1\le i\le n$ $T(u_i)=u_i$.

מכיוון שהגדרנו את T על בסיס של V, לפי משפט ההגדרה של הע"ל, אכן, הוגדרה העתקה לינארית יחידה.

כעת, נראה כי $\ker(T)=U$:

ראשית:

$$T(U)=span\{T(u_1),...,T(u_m)\}=span\{0\}=\{0\}$$

לכן, $U\subseteq\ker(T)$.

בנוסף:

$$\mathrm{Im}(T)=T(V)=span\{T(u_1),...T(u_m),T(u_{m+1}),...,T(u_m)\}=span\{0,...,0,u_{m+1},...,u_n\}=span\{u_{m+1},...,u_n\}$$

אבל, $\{u_{m+1},...,u_n\}$ בת"ל בתור תת קבוצה של בסיס. לכן $\dim\mathrm{Im}(T)=n-m$ כאשר,

$\dim(V)=n,\dim(U)=m$

אבל, לפי משפט הדרגה, $\dim\ker(T)+\dim\mathrm{Im}\,T=\dim V$

לכן, $\dim\ker T+n-m=n \Leftarrow \dim\ker T=m$.

לכן $U\le\ker(T)$ מאותו מימד. לכן, $U=\ker(T)$.

הערה: בהוכחה השתמשנו במשפט כי אם $T:V\to V$ הע"ל, $U\le V$ תמ"ו ו $B=\{u_1,...,u_m\}$ בסיס של U אז $T(U)=span\{T(u_1),...,T(u_m)\}$.

4.2 קיימת הע"ל $T:V\to V$ עבורה $\mathrm{Im}(T)=W$.

הוכחה: ההוכחה דומה להוכחת הסעיף הקודם, נמצא בסיס ל W, נרחיב אותו לבסיס של V. ההבדל היחיד הוא שכעת את אברי הבסיס של W נשלח לעצמם ואת שאר האיברים לאפס (או לחילופין, לוקטורים כלשהם ב W). נוכיח מבלי להניח כי V ממימד סופי.

יהי B בסיס של W. אזי B קבוצה בת"ל המוכלת ב V. לכן, קיים בסיס B' של V המכיל את B. נגדיר העתקה לינארית $T:V\to V$ באופן הבא:
לכל $b\in B$, $T(b)=b$
ולכל $b'\in B'\backslash B$ $T(b')=0$.
מכיוון שהגדרנו את T על בסיס של V, לפי משפט ההגדרה של הע"ל, אכן, הוגדרה העתקה לינארית יחידה.

כעת, נראה כי $\mathrm{Im}(T)=W$:

$\supseteq$: יהי $w\in W$. מכיוון ש B בסיס של W, קיימים $\alpha_1,...,\alpha_n\in F$, $b_1,...,b_n\in B$ כך ש

$$w=\alpha_1b_1+...+\alpha_nb_n$$

אבל, לכל $1\le i\le n$ $b_i\in B$, לכן, $T(b_i)=b_i$ לכן,

$$T(w)=T(\alpha_1b_1+...+\alpha_nb_n)=\alpha_1T(b_1)+...+\alpha_nT(b_n)=\alpha_1b_1+...+\alpha_nb_n=w$$

לכן, $w\in\mathrm{Im}(T)$.

$\subseteq$: יהי $v\in\mathrm{Im}(T)$, אזי אז קיים $x\in V$ כך ש $T(x)=v$, אבל, B' בסיס של V לכן קיימים $\alpha_1,...,\alpha_n\in F$, $b_1,...,b_n\in B'$ כך ש

$$x=\alpha_1b_1+...+\alpha_nb_n$$

לכן,

$$v=T(x)=T(\alpha_1b_1+...+\alpha_nb_n)=\alpha_1T(b_1)+...+\alpha_nT(b_n)$$

אבל, לכל $1\le i\le n$ $T(b_i)\in W$, לכן, v צירוף לינארי של איברים מ W. בגלל ש W תמ"ו, $v\in W$. מש"ל

הערה: לחילופין יכולנו להוכיח טענה כללית (בדומה למקרה עבור מרחבים ממימד סופי) לפיה: אם C בסיס של V ו $T:V\to V$ הע"ל אז $\mathrm{Im}(T)=span\{T(v):v\in C\}$ ואז אצלינו היינו מקבלים:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}(T)=span\{T(v):v\in B'\}=span\{\{T(v):v\in B\}\cup\{T(v):v\in B'\backslash B\}\}=\\&span\{T(v):v\in B\}+span\{T(v):v\in B'\backslash B\}=span\{v:v\in B\}+span\{0\}\\&=spanB+\{0\}=spanB=W\end{aligned}$$

מש"ל.

4.3 אם $\dim(U)+\dim(W)=n$ עבור $n=\dim V$ אז קיימת הע"ל $T:V\to V$ כך ש $\ker(T)=U$ ו $\operatorname{Im}(T)=W$.

הוכחה: נסמן $\dim(U)=m$, $\dim(W)=t$ ונקבל $t+m=n$
ויהי $B=\{u_1,...,u_m\}$ בסיס של U. אזי B קבוצה בת"ל המוכלת ב V. לכן, ניתן להשלימה לבסיס B' של V. $B'=\{u_1,...,u_m,v_1,...,v_t\}$.
כמו כן, יהי $C=\{w_1,...,w_t\}$ בסיס ל W.
נגדיר העתקה לינארית $T:V\to V$ באופן הבא:

לכל $1\le i\le m$, $T(u_i)=0$
ולכל $1\le j\le t$ $T(v_j)=w_j$.

מכיוון שהגדרנו את T על בסיס של V, לפי משפט ההגדרה של הע"ל, אכן, הוגדרה העתקה לינארית יחידה.

נראה כי $\ker(T)=U$ ו $\operatorname{Im}(T)=W$.

ראשית,
$$\operatorname{Im}(T)=T(V)=span\{T(u_1),...T(u_m),T(v_1),...,T(v_t)\}=span\{0,...,0,w_1,...,w_t\}=span\{w_1,...,w_t\}=W$$

לכן, מ"ל $\ker(T)=U$.
אבל,
$$T(U)=span\{T(u_1),...,T(u_m)\}=span\{0\}=\{0\}$$
לכן, $U\subseteq\ker(T)$.

וכן, לפי משפט הדרגה, $\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}T=\dim V$
לכן, $\dim\ker T+t=n \Leftarrow \dim\ker T=n-t=m$.
לכן $U\le\ker(T)$ מאותו מימד. לכן, $U=\ker(T)$. מש"ל.

5. יהיו V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F. ותהא $T:V\to W$ הע"ל. הוכיחו כי:

5.1 אם $\dim(V)<\dim(W)$ אז T אינה על.
הוכחה: לפי משפט הדרגה, $\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T)=\dim(V)$ לכן,
$\dim\operatorname{Im}(T)\le\dim(V)<\dim(W)$. בפרט $\operatorname{Im}(T)\neq W$ כי אחרת היה להם אותו מימד.

5.2 אם $\dim(V)>\dim(W)$ אז T אינה חח"ע.
הוכחה: נניח בשלילה כי T חח"ע אזי $\ker(T)=\{0\}$ ו $\dim\ker(T)=0$.
לכן, לפי משפט הדרגה:
$$\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T)=\dim(V)\Rightarrow$$
$$\dim\operatorname{Im}(T)=\dim(V)>\dim(W)$$
אבל, $\operatorname{Im}(T)\le W$ לכן $\dim\operatorname{Im}(T)\le\dim(W)$. סתירה.

5.3 אם $\dim(V)=\dim(W)$ אז T חח"ע אם ורק אם T על.
הוכחה: נתון כי $\dim(V)=\dim(W)$. נוכיח כי T חח"ע אם ורק אם T על.

$(\Leftarrow)$ T חח"ע לכן $\ker(T)=\{0\}$ ו $\dim\ker(T)=0$.
לכן, לפי משפט הדרגה:

$$\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T)=\dim(V)\Rightarrow$$
$$\dim\operatorname{Im}(T)=\dim(V)=\dim(W)$$

אבל $\operatorname{Im}(T)\le W$ מאותו מימד סופי, לכן: $\operatorname{Im}(T)=W$ ו T על.

$(\Rightarrow)$ T על לכן $\operatorname{Im}(T)=W$ ו $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim(W)=\dim(V)$.
לכן, לפי משפט הדרגה:

$$\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T)=\dim(V)\Rightarrow$$
$$\dim\ker(T)+\dim(V)=\dim(V)\Rightarrow$$
$$\dim\ker(T)=0$$

לכן T חח"ע.

6. קבעו האם קיימת הע"ל T עם התכונות המתוארות. אם כן, מצאו כזו. אחרת, הוכיחו כי לא קיימת T כנ"ל.

6.1 $T:R^3\to R^3$ כך ש $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\ker(T)$ וכן $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}(T)$.

פתרון:

(הסבר מקדים: נשים לב, אנו מעוניינים בהעתקה לינארית כך ש $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\ker(T)$ ומכיוון ש $\ker(T)$ הוא תמ"ו, זה שקול לדרישה ש $span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\ker(T)$ וכן ש $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}(T)$ מה ששקול לדרישה ש $\operatorname{Im}(T)\supseteq span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$. מכיוון שסכום המימדים של המרחבים האלה הוא 3 לפי שאלה 4 סעיף 3 בהכרח קיימת הע"ל כנ"ל.
יותר מזה, ההוכחה הראתה בדיוק איך להגדיר הע"ל כנ"ל).

פתרון: קיימת הע"ל כנ"ל – נגדיר כזאת.

נשים לב $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל. נשלים אותה לבסיס של R^3 (ע"י הוספת איבר שאינו צ"ל של שני אברי הקבוצה).

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

נגדיר הע"ל על ידי הגדרת הפעולה שלה על אברי הבסיס B :

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

לפי משפט ההגדרה של הע"ל, זה אכן מגדיר הע"ל.

לפי הגדרתה מתקיים, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\ker(T)$ וכן $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}(T)$. מכיוון ש $\operatorname{Im}(T)\le R^3$ גם $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}(T)$. לכן, ההעתקה המוגדרת עונה על הדרישות.

הערה: אם היינו מעוניינים להציג את ההעתקה T מפורשות, היה מספיק להציג כל איבר $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in R^3$ כצירוף לינארי של אברי הבסיס B.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&a\\1&2&3&b\\0&3&2&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&a\\0&1&1&b-a\\0&3&2&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-3R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&a\\0&1&1&b-a\\0&0&-1&c-3b+3a\end{array}\right)$$

ונקבל:

$$III)-\gamma=c-3b+3a\Rightarrow$$
$$\gamma=-c+3b-3a$$
$$II)\beta+\gamma=b-a\Rightarrow$$
$$\beta=b-a-\gamma=b-a-(-c+3b-3a)=b-a+c-3b+3a=2a-2b+c$$
$$I)\alpha+\beta+2\gamma=a\Rightarrow$$
$$\alpha=a-\beta-2\gamma=a-(2a-2b+c)-2(-c+3b-3a)=a-2a+2b-c+2c-6b+6a=5a-4b+c$$

לכן,

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=(5a-4b+c)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(2a-2b+c)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(-3a+3b-c)\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$$

ו

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=(5a-4b+c)T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(2a-2b+c)T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(-3a+3b-c)T\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=$$

$$(-3a+3b-c)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3a+3b-c\\-6a+6b-2c\\-9a+9b-3c\end{pmatrix}$$

6.2 $T:R^3\to R^4$ כך ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $\mathrm{Im}(T)$ ו $\left\{\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $\ker(T)$. (מזכיר לכם משהו? ☺)

פתרון: לא קיימת העתקה לינארית כזו. נוכיח זאת:
נניח בשלילה כי קיימת T כנ"ל אזי, לפי הנתון $\dim \mathrm{Im}(T)=1$ ו $\dim\ker T=1$

אבל, לפי משפט הדרגה: $\dim\ker T+\dim\mathrm{Im}\,T=\dim R^3$.
לכן, $1+1=3$. סתירה.

6.3 $T:R_2[x]\to R^3$ שמעבירה את $R_2[x]$ ל $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3:2x-y+z=0\right\}$.

פתרון: קיימת הע"ל כנ"ל. נגדיר כזו.
נמצא בסיס ל W.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3:2x-y+z=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3:z=y-2x\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\y-2x\end{pmatrix}:x,y\in R\right\}=$$

$$\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}:x,y\in R\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ולכן מהווה בסיס ל W.

נגדיר העתקה לינארית $T:R_2[x]\to R^3$ על W ע"י הגדרתה על הבסיס $\{1,x,x^2\}$ של $R_2[x]$.

$$T(1)=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\qquad T(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad T(x^2)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

לפי משפט ההגדרה של הע"ל, זה אכן מגדיר הע"ל.
בנוסף,

$$\mathrm{Im}(T)=span\{T(1),T(x),T(x^2)\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=W$$

כדרוש.

7. עבור ההעתקה הלינארית $T:R^3\to R^2$ המוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+2y-z\\y+z\end{pmatrix}$,

7.1 מצאו את $\mathrm{Im}(T)$ ואת מימדו.

פתרון: מכיוון ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של R^3,

$$\mathrm{Im}(T)=T(V)=span\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בפרט, $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}\,T$ וכן $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}\,T$. לכן $R^2=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathrm{Im}(T)\subseteq R^2$ ו
$\mathrm{Im}(T)=R^2$. לכן: $\dim\mathrm{Im}(T)=2$

7.2 מצאו את $\ker(T)$ ואת מימדו.

$$\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}x+2y-z\\y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x+2y-z=0,\,y+z=0\right\}$$

נמצא את הפתרונות למערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\y+z=0\Rightarrow y=-z\end{cases}$$

$$I)x+2(-z)-z=0$$

$$x=3z$$

לכן,

$$\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x+2y-z=0, y+z=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x=3z, y=-z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}3z\\-z\\z\end{pmatrix}: z\in R\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לכן: $\dim\ker(T)=1$

(נשים לב, מתקיים: $\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(t)=\dim R^3$).

7.3. מצאו את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים הסטנדרטיים. כלומר, מצאו $A\in M_{2\times 3}(R)$ כך שלכל $v\in R^3$ $T(v)=Av$.

פתרון: המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים הסטנדרטיים היא:

$$A=\left(T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

7.4. מצאו את $C(A)$ ואת מימדו. השוו לתוצאה מסעיף 1.

נשים לב, A מטריצה מדורגת. לכן, העמודות של הצירים שם מהוות בסיס למרחב העמודה שלה.

לכן:

$$C(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אבל, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה בת"ל ולכן מהווה בסיס ל $C(A)$. בפרט, $\dim C(A)=2$. אבל, $C(A)\le R^2$ תמ"ו מאותו מימד סופי. לכן, $C(A)=R^2$.

נשים לב: $\operatorname{Im}(T)=C(A)$ (וכמובן $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim C(A)$)

7.5. מצאו את $N(A)$ ואת מימדו. השוו לתוצאה מסעיף 2.

נמצא את פתרונות המערכת ההומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

נציב $z=t$ אז $y=-t$ ו $x+2(-t)-t=0 \Leftarrow x=3t$

לכן,

$N(A)=span\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ומימדו 1.

נשים לב: $\ker(T) = N(A)$ (ובפרט $\dim \ker(T) = \dim N(A)$)

בהצלחה! ☺