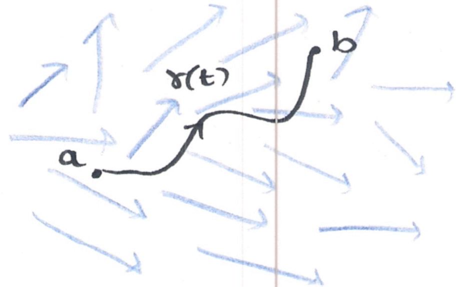
הגרסאות הקלאסיות של משפט סטוקס

(1) משפט הגרדיאנט/ המשפט היסודי של החדו"א/ נוסחאות ניוטון לייבניץ.



$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ שדה סקלרי

$\downarrow$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ שדה וקטורי

$\gamma(t)$ עקומה נתונה בין a ל-b.

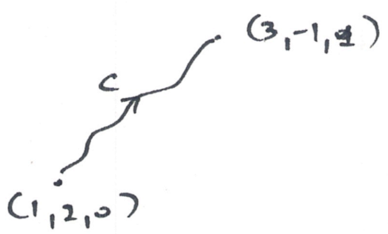
סימון: $d\vec{r} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ וקטור השינוי במיקום.

המשפט

$$\boxed{\int_\gamma \nabla f\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = f(b)-f(a)}$$

תרגיל: חשב את $\int_c \nabla f\cdot d\vec{r}$ עבור $f(x,y,z) = x^2+e^{yz}$

ו-c היא עקומה כלשהי שמתחילה ב-$(1,2,0)$ ומסתיימת ב-$(3,-1,1)$



פתרון: c עקומה כלשהי ← האינטגרל לא תלוי בבחירת המסלול אלא רק בקצוות:

ע"פ משפט הגרדיאנט:

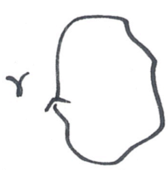
$$\int_c \nabla f\cdot d\vec{r} = f(3,-1,1)-f(1,2,0) = 3^2+e^{-1}-1-e^0 = 7+\frac{1}{e}$$

מסקנות ממשפט הגרדיאנט:

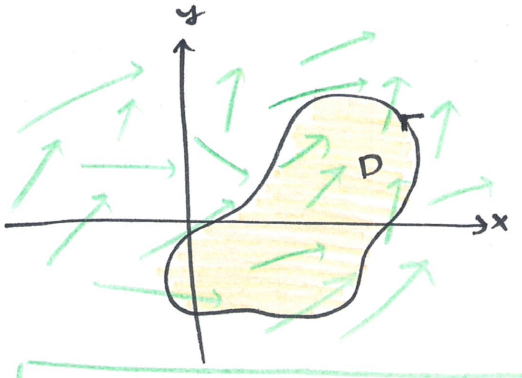
אם $\vec{F}$ שדה וקטורי משמר (קיימת פונקציה f כך ש $\nabla f = F$) אז:

(1) $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ לא תלוי בבחירת המסלול בין a ו-b

(2) $\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = 0$ לכל עקומה סגורה γ



(כי אז לכל $a\in\gamma$ יתקיים $\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = f(a)-f(a) = 0$)



② משפט גרין:

נתון שדה ב $\mathbb{R}^2$: $\vec{F}=(P,Q)$

ו $D\subset\mathbb{R}^2$ תחום 2 מימדי. ∂D עקומה סגורה עם אוריינטציה מושרית מ- D.

אז מתקיים:

$$\boxed{\int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy=\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\;dx\wedge dy}$$

כאשר $\vec{n}=(0,0,1)$ וקטור נורמל לתחום כי כאשר $\mathbb{R}^2$ הוא מישור xy ב $\mathbb{R}^3$

③ משפט סטוקס:

נתון שדה ב- $\mathbb{R}^3$: $\vec{F}=(P,Q,R)$

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ תחום 2-מימדי ← $\partial\Omega$ עקומה סגורה. (עם אוריינטציה מושרית)

תזכורת: $\operatorname{rot}\vec{F}=(R_y-Q_z\,,\,P_z-R_x\,,\,Q_x-P_y)$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\vec{F}\,d\vec{r}&=\int_{\partial\Omega}P\,dx+Q\,dy+R\,dz\\&=\iint_\Omega\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\\&=\iint_\Omega \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,\underbrace{dS}_{\text{אלמנט שטח}}\end{aligned}}$$

* משפט גרין הוא מקרה פרטי של משפט סטוקס: כי אם $\vec{n}=(0,0,1)$!

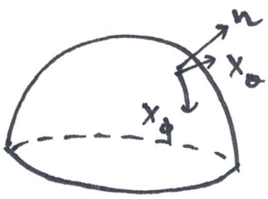
$\operatorname{rot}\vec{F}=\left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

תרגול ממבחן:

בעזרת נוסחת סטוקס חשב $\iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ עבור $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$

! $M=\{x^2+y^2+z^2=1 \quad z\ge 0\}$! $\vec{n}$ וקטור נורמל עליון ל-M.

פתרון: האוריינטציה ב-M נקבעת ע"י וקטור הנורמל העליון



← הפרמטריזציה המתאימה לאוריינטציה זו: (צריך לבדוק)

$$X(\phi,\theta)=(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi)$$

משפה $\phi=\frac{\pi}{2}$! X_ϕ וקטור נורמל חיצוני.

$(X_\phi, \underbrace{X_\theta}_{\downarrow})$ בסיס מייצג לאוריינטציה ב-M

X_θ בסיס מייצג לאוריינטציה ב ∂M ← $\partial M(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$

עפ"י משפט סטוקס:

$$\iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\,\vec{n}\,ds=\int_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\partial M} x^2dx+y^2dy+z^2dz$$

$\gamma(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$

$\dot{\gamma}(\theta)=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$ $\rightarrow$ $=\int_0^{2\pi}\left[\cos^2\theta\,(-\sin\theta)+\sin^2\theta\,(\cos\theta)+0\right]d\theta$

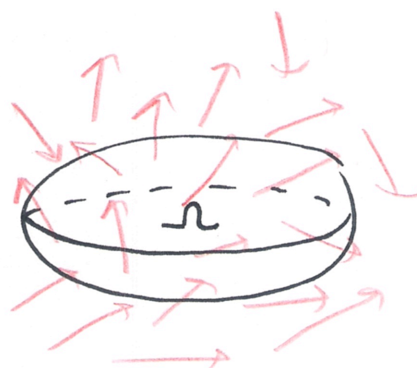
$=0$ ← הפונקציות מחזוריות 2π

הסבר נוסף... $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ הוא שדה משמר

כי עבור $f(x,y,z)=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}$ $\quad\vec{F}=\nabla f$

$\gamma=\partial M$ זו מסילה סגורה $\Leftarrow$ $\int_{\partial M}\vec{F}d\vec{r}=0$.

③ משפט גאוס:



נתון שדה ב $\mathbb{R}^3$: $\vec{F}=(P,Q,R)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ תחום 3-מימדי. אם $\partial\Omega$ יריעה סגורה 2-מימדית.
(עם אוריינטציה מושרית n)

אז:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz =$$

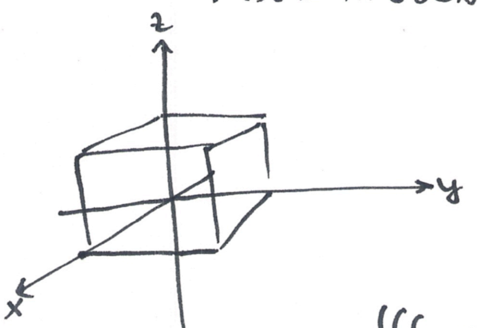
אלמנט נפח $dx\wedge dy\wedge dz$

$$= \iint_{\partial\Omega} P\, dy\wedge dz + Q\, dz\wedge dx + R\, dx\wedge dy = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

תרגול ממבחן:

תהי V קוביית היחידה באוקטנט החיובי שפאותיה מונחות על המישורים xy, yz, xz

ויהי השדה: $\vec{F}=(x,y,z)$ אשר את משפט הדיברגנץ.



פתרון: צריך להראות

$$\oiint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\, dV$$

אגף ימין:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1+1+1)\, dx\wedge dy\wedge dz = 3$$

אגף שמאל: ∂V מורכבת מ-6 פאות.

3 שמונחות על המישורים xy , yz ו xz

נסמן: $S_{z=0}$ $S_{x=0}$ $S_{y=0}$

ו-3 נוספות $S_{z=1}$ $S_{y=1}$ $S_{x=1}$.

נחשב:

$$\iint_{S_{z=0}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint (x,y,0)\cdot(0,0,-1)\, ds = 0$$

$\vec{n}=(0,0,-1)$ וקטור נורמל חיצוני

$\vec{F}\big|_{S_{z=0}} = (x,y,0)$

באופן זהה:

$$\iint_{S_{y=0}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_{S_{x=0}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 0$$

מטעמי סימטריה – נחשב רק את

$$\iint_{S_{z=1}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\vec{n} = (0,0,1) \qquad \vec{F} = (x,y,1)$$

$\Downarrow$

$$\iint_{S_{z=1}} (x,y,1)\cdot(0,0,1)\, ds = \iint_{S_{z=1}} dS = \text{שטח של } S_{z=1} = 1$$

$$\Leftarrow \iint_{S_{y=1}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_{S_{x=1}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 1$$

$\Leftarrow$

$$\iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = 3$$