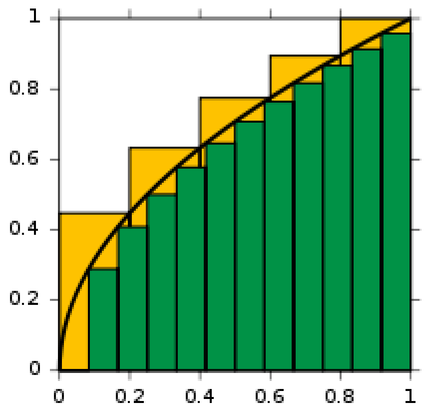
נכתב על ידי נועם יערי

האינטגרל המסוים

מוטיבציה



עבור פונקציות "יפות מספיק", סכום שטחי המלבנים "קרוב" לשטח שבין הגרף לציר ה - x.

הגדרה

חלוקה של קטע סגור $[a,b]$ היא קבוצה סופית $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו כך ש:

$$a=x_0<\cdots<x_n=b$$

חלוקה של קטע סגור מחלקת אותו לתת קטעים סגורים (ניתן להציגו כאיחוד של קטעים סגורים).

הגדרה

חלוקה מנוקדת של קטע סגור $[a,b]$ היא חלוקה $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$, יחד עם בחירה של נקודה $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ לכל $i=1,\cdots,n$.

נסמן $x_i-x_{i-1}=:\Delta x_i$ = אורך הקטע ה $i-$ בחלוקה.

הגדרה

תהי f פונקציה מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$.

1. עבור חלוקה מנוקדת $P: a=x_0<\xi_1<x_1<\cdots<x_n=b$, נגדיר את סכום רימן המתאים ל - P:

$$\sigma(P)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_1)\Delta x_i$$

2. הנורמה של החלוקה P מוגדרת:

$$\lambda(P):=\max(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$$

האורך המקסימלי של קטע בחלוקה (נקרא גם הפרמטר של P)

.3

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(P)=I$$

(לא פורמלי: $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$)

פירוש: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה מנוקדת P עם $\lambda(P)<\delta$ מתקיים $|\sigma(P)-I|<\varepsilon$. בלשון הסדרות: לכל סדרת חלוקות מנוקדות (P_n) כך ש - $\lambda(P_n)\to 0$ מתקיים $\sigma(P_n)\to I$.

כאשר הגבול I הנ"ל קיים, נאמר ש -

$$\int_a^b f(x)dx=I$$

ונקרא ל I – האינטגרל המסוים של f בקטע $[a,b]$.

(**תרגיל**: הוכח את שקילות שתי ההגדרות בסעיף 3 כלומר לפי ε,δ ולפי סדרות)

4. כאשר $\int_a^b f(x)dx$ קיים, אומרים שהפונקציה f אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$.

דוגמה

$$\int_a^b cdx=c(b-a)$$

תהי P חלוקה מנוקדת.

$$\sigma(P)=_{\text{הגדרה}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum c\cdot\Delta x_i=c\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=c(x_n-x_0)=c(b-a)$$

זה נכון לכל חלוקה מנוקדת ולכן גם הגבול $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(P)=c(b-a)$

דוגמה

הפונקציה של דיריכלה:

$$D(x):=\begin{cases}1, x\notin\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

אינה אינטגרבילית באף קטע $[a,b]$:

לכל n, נחלק את $[a,b]$ לקטעים $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

P_n: החלוקה הנ"ל, עם נקודות אי רציונליות $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

$P_n{}'$: החלוקה הנ"ל, עם נקודות רציונאליות $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

$$\lambda(P_n)=\lambda(P')=\frac{b-a}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

$$\sigma(P_n)=\sum f\left(\xi_{i_{P_n\text{ הניקודים של }}}\right)\Delta x_i=_{\text{כמו קודם}}b-a$$

$$\sigma(P_n')=\sum f\left(\xi_{i_{P_n'\text{ הניקודים של}}}\right)\Delta x_i=\sum 0\cdot\Delta x_i=0\neq b-a$$

לכן הגבול $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(P)$ לא קיים.

דוגמה

פונקציה לא רציפה אך אינטגרבילית:

$f(x)\coloneqq[x]$ בקטע $[0,2]$:

$$\int_0^2[x]dx=^{?}1$$

תיקון גלובלי:

בחלוקה מנוקדת, היחס בין הנקודות הוא $a=x_0\leq\xi\leq x_1\leq\cdots\leq x_n=b$

ובנוסף $a=x_0<x_1<\cdots x_n=b$.

נקבע $\delta>0$. תהי P חלוקה מנוקדת כרגיל, כך ש $\lambda(P)<\delta$ – . יהיו i כך ש $1\in[x_{i-1},x_i]$ – .

נשים לב: $2\in\left[x_{n-1},x_{n=2}\right]$.

$$\sigma(P)=\sum_{j\notin\{i,n\}}f(\xi_j)\Delta x_j+f(\xi_i)\Delta x_i+f(\xi_n)\Delta x_n=$$

$$=\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1}\cdots}_{=0}+\underbrace{\sum_{j=i+1}^{n-1}\cdots_{f(\xi_j)=1}}_{\Rightarrow x_{n-1}-x_{i+1}}+f(\xi_i)\Delta x_i+f(\xi_n)\Delta x_n$$

עבור δ קטן מספיק,

$$x_n-\delta<x_n-1<x_{n=2}$$

$$1<x_{i+1}<1+\delta$$

$$-(1+\delta)<-x_{i+1}<-1$$

מהאי"ש הראשון והשלישי, על ידי חיבור אי"ש $1-2\delta<x_{n-1}-x_{i+1}<1$

$$\Rightarrow|\sigma(P)-1|=|(x_{n-1}-x_{i+1})+f(\xi_i)\Delta x_i+f(\xi_n)\Delta x_n-1|\leq$$

$$\leq|(x_{n-1}-x_{i+1})-1|_{<2\delta}+\left(f(\xi_i)\right)_{<3}\Delta x_{i_{<\delta}}+f(\xi_n)_{<3}\Delta x_{n_{<\delta}}>8\delta$$

פורמלית, בהינתן $\varepsilon>0$ ניקח $\delta\coloneqq\max\{\frac{\varepsilon}{8},1\}$ אז לכל חלוקה מנוקדת P עם $\lambda(P)<\delta$ הניתוח לעיל תקף ולכן $|\sigma(P)-1|<8\delta=\varepsilon$. לכן $\int_0^2[x]dx=1$.

למה

אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז f חסומה בקטע. (ההפך איננו נכון – לדוגמה פונקציית דיריכלה חסומה אך אינה אינטגרבילית).

הוכחה

תהי f לא חסומה ב - $[a,b]$. נוכיח שהגבול $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(P)$ אינו קיים.

(קיים = קיים במובן הצר)

יהי $I\in\mathbb{R}$

ניקח $\varepsilon := 1$. יהי נתון $\delta > 0$. נמצא חלוקה מנוקדת P כך ש - $|\sigma(P)-I| > 1 =: \varepsilon$.

$$|\sigma(P)-I| \geq_{\text{אשמ}} |\sigma(P)|-|I| >_{\text{נסדר}} 1$$

למעשה, אפשר להסתדר עם כל חלוקה P כך ש - $\lambda(P)<\delta$:

תהי $P: a=x_0<\cdots x_n=b$. f אינה חסומה בקטע $[a,b]$ לכן יש i כך ש – f אינה חסומה ב - $[x_{i-1},x_i]$ (מדוע?) ניקח $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ כך ש - $|f(\xi_i)\Delta x_i| < 1+|I|+\underbrace{\sum_{j\neq i} f(\xi_j)\Delta x_j}_{=c}$.

פורמלית: נבחר נקודה $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$ שרירותית עבור $j\neq i$.

נבחר $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ כך ש - $|f(\xi_j)| < \frac{1}{\Delta x_i}\left(1+|I|+\left|\sum f(\xi_j)\Delta x_j\right|\right)$

מאי"ש המשולש מתקיים (תרגיל!) גדול מ1 וסיימנו.

■