תרגול 3

1. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות קבעו אם היא פונקציית ליפשיץ ואם כן, מה המקדם שלה:
   (א) פונקציית ההטלה על רכיב i, $P_i : (l_\infty, d_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ שמוגדרת ע"י $P_i((x_n)) = x_i$.
   (ב) פונקציה אפינית $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ שמוגדרת ע"י $\varphi_{a,b}(x) := ax + b$.
   (ג) פונקציית השורש $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f(x) := \sqrt{x}$.

2. (אולי יופיע בש"ב): יהי (X, d) מרחב מטרי, ו־$A \subseteq X$. אזי $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f_A(x) = d(x, A)$ רציפה. הסיקו מכאן:
   (א) הנורמה היא פונקציה רציפה
   (ב) כדור סגור הוא סגור, וכדור פתוח הוא פתוח

3. קבעו עבור כל קבוצה האם היא סגורה והאם היא פתוחה:
   (א) $A = \{(x, y) : xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$
   (ב) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ביחס למטריקה ה־p־אדית.
   (ג) $\mathbb{R}^n \setminus F$ כאשר F קבוצה סופית.
   (ד) $\mathbb{R}^n \setminus C$ כאשר C קבוצה בת מניה.
   (ה) $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ (כלומר קבוצת המטריצות ההפיכות).

4. הוכיחו שבמרחב מטרי כל קבוצה סגורה היא G_δ. הסיקו שכל קבוצה פתוחה היא F_σ

5. במרחב l_∞ ניקח את תת הקבוצה A של כל הסדרות שמתאפסות לבסוף.
$$A = \{(x_n) \in l_\infty : \exists n_0, \forall m > n_0, x_m = 0\}$$
   מהו $cl(A)$? כיצד תשובתכם תשתנה אם נסתכל על $A \subseteq l_p$ עבור $1 \le p < \infty$?

6. הוכיחו שההגדרות הבאות ל $cl(A)$ שקולות:
   (א) $cl(A) = \{x : d(x, A) = 0\}$
   (ב) הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A. $cl(A) = \cap_{A\subseteq S} S$, כאשר $A \subseteq S$ סגורה. (שימו לב שמכיוון שחיתוך של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה, הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A מתקבלת ע"י חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A.)

7. A סגורה $\iff A' \subseteq A$.

8. הוכיחו שלכל קבוצה A, A' היא קבוצה סגורה.

9. לכל קבוצה $A \subseteq X$ במרחב מטרי נסמן $A^{(n)} := A''^{\cdots}$ (כלומר הנגזרת ה־n־ית). נסמן גם $A^{(0)} := A$. נגדיר אפילו $A^{(\omega)} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$. דרגת קנטור בנדיקסון מוגדרת ע"י

$$cb(A) := \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \mid A^{(n)} = A^{(n+1)}\}$$

שימו לב שהיא לא תמיד קיימת. קבוצה היא מושלמת אם דרגת קנטור־בנדיקסון (Cantor Bendixon) שלה היא 0. מצאו תת קבוצות של $\mathbb{R}$ שמקימות את התנאים הבאים:

(א) קבוצה שהנגזרת השניה שלה היא קבוצה ריקה (אבל לא הראשונה)

(ב) קבוצה מושלמת לא ריקה

(ג) קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא 2 והנגזרת שלה אף פעם לא ריקה

(ד) קבוצה שדרגת קנטור בנדיקסון שלה היא ω.

העשרה (+ ספוילרים לתורת הקבוצות): ניתן להגדיר נגזרת עבור כל סודר. משפט קנטור בנדיקסון אומר שבמרחבים "נחמדים" מספיק, כל קבוצה ניתן לפירוק לקבוצה מושלמת וקבוצה בת מניה. זו הייתה המוטיבציה הראשונית של קנטור להתחיל לחקור את מה שהיום אנחנו קוראים לו תורת הקבוצות.

10. פתרו את המשוואה הבאה מעל $\mathbb{Z}_p$:

(א) $2x = 1$ כאשר $p = 3$

(ב) $x^2 = -7$ כאשר $p = 2$.

11. לכל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה הגרף שלה $G_f = \{(x, f(x))\}$ סגור ב $\mathbb{R}^2$.

12. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, כך ש$G_f$ סגורה. האם f רציפה?