פתרון תרגיל 11 חדו"א 2 למורים באר שבע תש"ף

2 ביולי 2020

1. נשתמש בטור הידוע של $\cos$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$$

כדי לרשום הכי יפה שאפשר, נשים לב שכאשר $n=0$ האיבר הוא $-\frac{1}{2}$, שמתבטל עם $\frac{1}{2}$ שמחוץ לטור, ולכן אפשר לרשום:

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} t^n$$

נציב $x = \frac{1}{2}$ ונרשום כמה איברים ראשונים:

$$\sin^2 \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\,(2n)!} \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{48} + \frac{1}{1440}$$

הטור מתחלף ולכן השגיאה לא תעלה על האיבר הבא, האיבר $\frac{1}{1440}$ כבר קטן מאלפית אז זהו חישוב מספיק (ואפילו מחמיר באיבר אחד).

2. הנגזרות הן:

$$f = x^{\frac{1}{2}},\ f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ f'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\ f''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

בנקודה $x=9$ נקבל:

$$f = 3,\ f' = \frac{1}{6},\ f'' = -\frac{1}{108},\ f''' = \frac{1}{648}$$

ולכן:

$$\sqrt{x} = f(x) \approx p_3(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-3)^2 - \frac{1}{216}(x-3)^2 + \frac{1}{3888}(x-3)^3$$

בנקודה $x=10$ נקבל:

$$\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3888}$$

3. כשנציב $x=\frac{1}{2}$ בטור הידוע של $f\left(x\right)=e^{x}$ נקבל:

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=\sum\frac{1}{2^{n}n!}$$

זהו לא טור מתחלף, ולכן נעריך את השגיאה לפי לגראנז' – קיים $0<c<\frac{1}{2}$ עבורו:

$$\left|R_{n}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right|=\left|\frac{e^{c}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right|\leq\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n}\left(n+1\right)!}$$

ונדרוש שהביטוי הזה יהיה קטן מ-10^{-5}; זה קורה כאשר $n=6$, ולכן הערך המקורב הוא הסכום עד $n=6$.