18/3/2018

גיאומטריה
אנליטית
ודיפרנציאלית

תרגול..

מס' ③ -

תזכורת: * חתך חרוט *.

תרגילים: ① - למיין את: $xy-1=0$

פתרון:

$$S=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ע"ע:

$$|S-\lambda I| = \begin{vmatrix} -x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -x \end{vmatrix} = x^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{2}.$$

אז:

$$\Delta=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-1=0.$$

היפרבולה..

* משטחים ריבועיים:

תזכורת:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dxz+fz^2+2gyz+hx+iy+jz+k=0.$$

המשטחים הלא מנוונים: $a,b,c,d>0$

① - אליפסואיד: משוואה:

$$ax^2+by^2+cz^2-d=0.$$

כאשר $a,b,c,d>0$

② - היפרבולואיד: ישנם שני סוגים:

(א) - חד יריעתי: $az^2=bx^2+cy^2-d.$

(ב) - דו יריעתי: $az^2=bx^2+cy^2+d.$

③ - פרבולואידים : שנים של מקרים :

(א) - פרבולואיד אליפטי : $z = ax^2 + by^2$

(ב) - פרבולואיד היפרבולי : $z = ax^2 - by^2$

עם $a \cdot b > 0$

דוגמא 8 לסווג את :

$$2x^2 + 7y^2 + z^2 - x + 4y - 6z + \frac{39}{56} = 0$$

פתרון : כמו אליפסואיד , נבצע השלמה לריבוע :

אז :

$$\cancel{2x^2 =}$$

$$2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] + 7\left[\left(y + \frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{49}\right] + (z-3)^2 - 9 + \frac{39}{56} = 0.$$

נגדיר : שינוי קואורדינטות ,

$x' = x - \frac{1}{4}.$

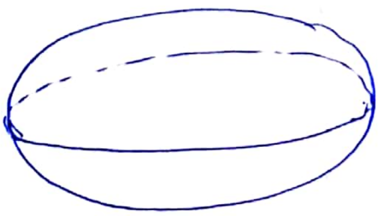
$y' = y + \frac{2}{7}.$

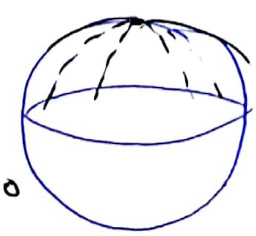
$z' = z - 3.$

נקבל :

$$\cancel{2x^2 -} \quad 2(x')^2 + 7(y')^2 + (z')^2 - 9 = 0.$$

וזו משוואת אליפסואיד.





$k > 0$ [illegible] חיצונית.

לסכם: נסווג:

$$2x^2+y^2-6xz-6z^2+y-2=0$$

xy xz yz

$$S=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

מטריצה

על האלכסון
המקדמים
הריבועיים.

שלב
לכסון על

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{vmatrix}2-x & -3\\ -3 & -6-x\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x-2)(x+6)+9=0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{1,2}=-7,3.$$

שאלה 1
מסכמת.

אז:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

אז:

שזה y
בגלל ~~מעורבים~~
אין מעורבים ~~לכן~~. (אין גורמים
xy, yz) : אז
לכן אין צורך לחשב
את P. ולכן נשארים
בינתיים נשאר אותו דבר.

$$3x^2+y^2-7z^2+y-2=0.$$

$$3x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-7z^2-2=0$$

שינוי צורה. $\Updownarrow$

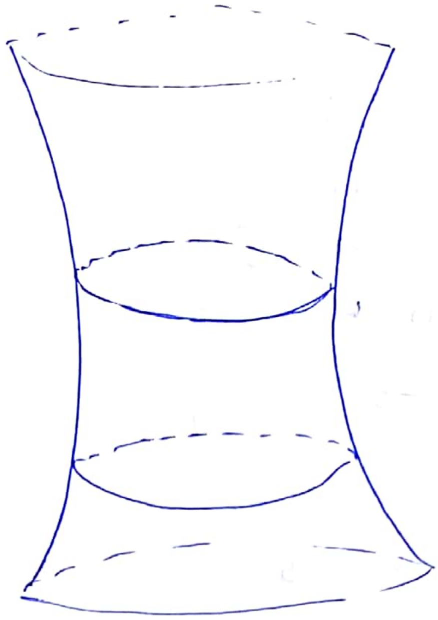
$$\boxed{3x^2+y^2-7z^2-\frac{9}{4}=0.}$$

כי היפרבולואיד חד יריעתי:

$$\vdots$$

$$7z^2=3x^2+y^2-\frac{9}{4}.$$

אז



$k < 0$

תרגיל : סווג :

$$x^2+y^2+z^2+\underbrace{4yz}_{\text{מעורב.}}+2x+6=0.$$

פתרון :

ציר x אינווריאנטי לפעולת S.

$$S=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{עב' בלוק}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3, -1.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2+3y^2-z^2+2x+6=0.$$

$$(x+1)^2-1+3y^2-z^2+6=0.$$

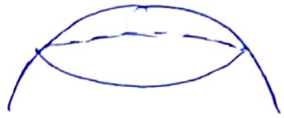
$$\Updownarrow$$

$$x^2+3y^2-z^2+5=0.$$

$$\boxed{z^2 = x^2+3y^2+5}$$

זה היפרבולואיד בן-יריעה.

$k > 0.$



תרגיל 8

פתרון:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2xz + 2z^2 - 2yz + 6x + 6y + 2 = 0.$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

[illegible]
[illegible] לכסון
אורתוגונלי
S.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

[illegible]:

$$(6 \quad 6 \quad 0) \cdot P = (4\sqrt{3} \quad 3\sqrt{2} \quad \sqrt{6})$$

$$\Downarrow$$

$$0 \cdot x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y + \sqrt{6}z + 2 = 0.$$

[illegible]

השלמה לריבוע :

$$3\cdot\left[\left(\overbrace{y+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{y}\right)^2-\frac{1}{2}\right]+3\cdot\left[\left(\overbrace{z+\frac{\sqrt{6}}{6}}^{z}\right)^2-\frac{1}{6}\right]+4\sqrt{3}x+2=0.$$

אחרי שינוי מרכז :

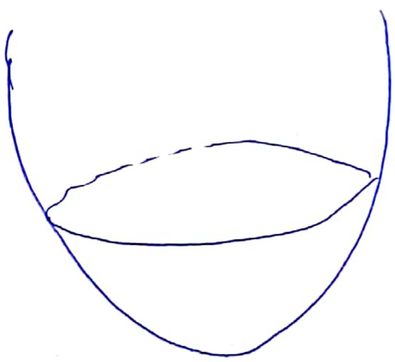
$$3y^2+3z^2+4\sqrt{3}x=0.$$

$$\boxed{4\sqrt{3}x=-3y^2-3z^2.}$$

$a\cdot b>0$

וזה : פרבולואיד אליפטי .

$k>0$



תרגיל 8 פתרון :

$$8x^2-4y^2+8z^2+16xz+60y+48x-207=0.$$

פתרון :

$$S=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&-4&0\\8&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{לכסון}]{}\begin{pmatrix}8&8\\8&8\end{pmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2}=0,16.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

הערה:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

לכן:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

כעת:

$$\begin{pmatrix} 48 & 60 & 0 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 24\sqrt{2} & 60 & 24\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

כעת:

$$\cancel{0 \cdot x^2} - 4y^2 + 16z^2 + 24\sqrt{2}x + 60y + 24\sqrt{2}z - 207 = 0$$

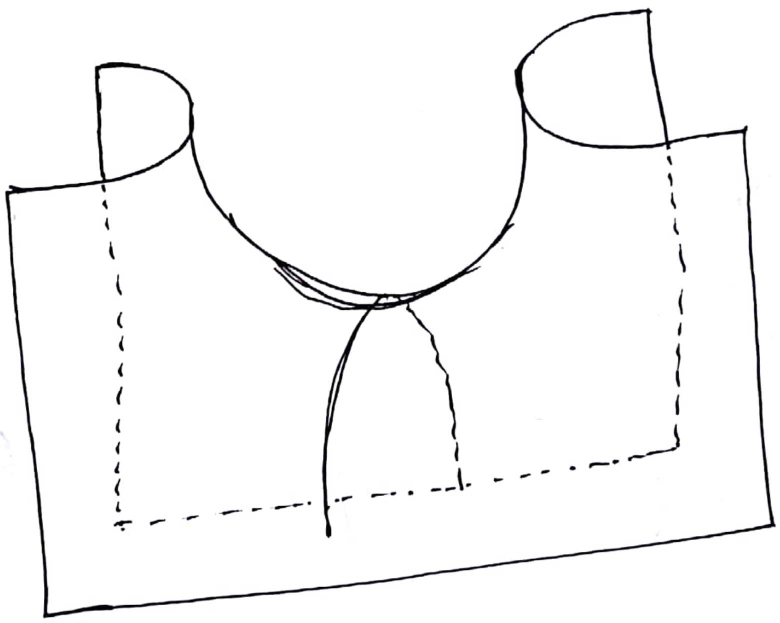
השלמה לריבוע + פינוי מקדמים:

$$\boxed{-4y^2 + 16z^2 + 24\sqrt{2}x = 0.}$$

$$\cancel{16z^2 = 4y^2 - 24\sqrt{2}}$$

$$\boxed{24\sqrt{2}\,x = 4y^2 - 16z^2}$$

ולכ פרבולואיד היפרבולי.



$K<0$

נשים לב ש: ⊛ אפשרי שהע"ע הם כולם שונים מ-0.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.

נקבל:

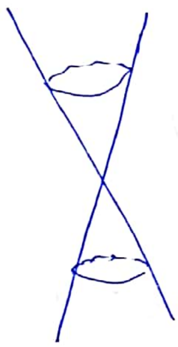
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - d = 0$$

⊛ אם יש ע"ע גם חיוביים וגם שליליים, ועם $d=0$.
מקבלים את הצורה המנוונת חרוט.

למשל:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

// כמו לקפל מטפה (נייר). טופולוגית זה אותה צורה //.



$k=0$.

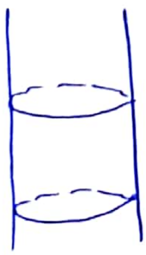
⊛ אם בדיוק אחד מע"ע הוא 0. ($\mathrm{rank}\ S = 2$).

נקבל: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + cz + d = 0$, לא מנוון

אין מנוון במקרה זה..

⊛ אם $c=0$ נקבל מקרה מנוון.

דוג': $x^2 + y^2 - 1 = 0$. וזה צילינדר. (גליל).



$k=0$.

תרגיל : ~~סוג~~ . סווג :

$$5x^2-12xz-2y^2+5z^2+8y-8=0.$$

פתרון :

$$S=\begin{pmatrix}5&0&-6\\0&-2&0\\-6&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}5&-6\\-6&5\end{pmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2}=11,-1.$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}11&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

אנו צריך לאפס
את מלכסן
כי צריך לקנונית
ומאפס $(8y-8)$ לכן

$$11x^2-2y^2-z^2+8y-8=0.$$

כמקום נציב. $\Downarrow$

$$11x^2-2y^2-z^2=0.$$

קונוס כפול.

$k=0.$

זהו חרוט.