

תרגיל 4

שאלה 1

נניח ש- $c \in \mathbb{R}$. $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$. נניח ש- $a_n \rightarrow \infty$.

- א. אם $c \neq 0$, האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, מה ניתן לומר על הגבול? אם לא, מצאו דוגמא נגדית.
- ב. אם $c = 0$, האם b_n חסומה? הוכיחו את תשובתכם (שימו לב: התשובה היא גורפת. כלומר, הוכיחו שהיא חסומה בהכרח, או שהיא לא חסומה בהכרח).
- ג. בסעיף ב', האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, הוכיחו. אם לא – מצאו דוגמא נגדית.

שאלה 2

שימו לב: לצורך פתרון שאלה זו יש לקרוא את פרק 5 (חזקות ממשיות) של תקציר ההרצאות, ולהשלים לעצמכם את ההוכחות.

יהי $a > 1$ ו- x מס' ממשי.

הראו כי $a^x = \sup \{a^r : r < x, r \in \mathbb{Q}\} = \inf \{a^r : r > x, r \in \mathbb{Q}\}$