

אינפי 1 – מדמ"ח – פתרון תרגיל 2

1. הערה: להלן לצורך נוחות הביטוי "מספר משמעותי" משמעותו "מספר סופי שאינו אינפיניטסימל".

$$.i \quad \frac{H+H^4+3}{3H^4-19} = \frac{\frac{H}{H^4} + \frac{H^4}{H^4} + \frac{3}{H^4}}{\frac{3H^4}{H^4} - \frac{19}{H^4}} = \frac{1 + \frac{1}{H^3} + \frac{1}{H^4}}{3 - \frac{19}{H^4}}$$

המספר במונה הוא משמעותי (כסכום של מס' משמעותי עם

אינפיניטסימל) והמספר במכנה גם הוא משמעותי מאותה סיבה. ע"כ המספר כולו הוא משמעותי כמנה של מספרים משמעותיים.

$$.ii \quad \frac{H-H^2+H^3}{H^2-H^3+H^4} = \frac{\frac{H}{H^4} - \frac{H^2}{H^4} + \frac{H^3}{H^4}}{\frac{H^2}{H^4} - \frac{H^3}{H^4} + \frac{H^4}{H^4}} = \frac{\frac{1}{H^3} - \frac{1}{H^2} + \frac{1}{H}}{\frac{1}{H^2} - \frac{1}{H} + 1}$$

במונה יש מס' אינפיניטסימלי (כסכום של מס' אינפיניטסימליים) ומכנה יש מס' משמעותי (סכום של מס' משמעותי עם אינפיניטסימלי) לכן סה"כ מתקבל מס' אינפיניטסימלי.

$$.iii \quad \frac{1+2H+3H^2}{64-3H} = \frac{\frac{1}{H^2} + \frac{2H}{H^2} + \frac{3H^2}{H^2}}{\frac{64}{H^2} - \frac{3H}{H^2}} = \frac{\frac{1}{H^2} + \frac{2}{H} + 3}{\frac{64}{H^2} - \frac{3}{H}}$$

המונה משמעותי, המכנה אינפיניטסימל (שאינו 0), ע"כ המס' אינסופי.

$$.iv \quad \frac{8H+128+2\epsilon}{2H-256-512\epsilon} = \frac{\frac{8H}{H} + \frac{128}{H} + \frac{2\epsilon}{H}}{\frac{2H}{H} - \frac{256}{H} - \frac{512\epsilon}{H}} = \frac{8 + \frac{128}{H} + \frac{2\epsilon}{H}}{2 - \frac{256}{H} - \frac{512\epsilon}{H}}$$

המונה והמכנה משמעותיים, ע"כ המס' משמעותי.

$$.v \quad H^2 - H - 5 = H(H-1) - 5$$

כלומר זהו מס' אינסופי כמכפלה של שני מס' אינסופיים פחות מספר סופי.

$$.vi \quad \sqrt{H+1} - \sqrt{H} = (\sqrt{H+1} - \sqrt{H}) \frac{(\sqrt{H+1} + \sqrt{H})}{\sqrt{H+1} + \sqrt{H}} = \frac{1}{\sqrt{H+1} + \sqrt{H}}$$

של מספרים אינסופיים חיוביים), ע"כ המספר אינפיניטסימלי.

$$.vii \quad \frac{\sqrt{4+\epsilon} - 2}{\epsilon} = \frac{(\sqrt{4+\epsilon} - 2)(\sqrt{4+\epsilon} + 2)}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon} + 2)} = \frac{\epsilon}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4+\epsilon} + 2}$$

לכן משמעותי (חילוק של משמעותי במשמעותי).

$$.viii \quad H \left(\sqrt{4 + \frac{1}{H}} - \sqrt{2} \right)$$

זהו מספר אינסופי כמכפלה של מספר אינסופי עם מספר משמעותי.

$$ix. \quad H\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-2\right)=H \frac{\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}-2\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2}=H \frac{\frac{1}{H}}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2}=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{H}}+2}$$

משמעותי כי זו חלוקה של מס' משמעותי במס' משמעותי.

2. יהי H מספר אינסופי חיובי, K מספר אינסופי חיובי הגדול ממנו. הוכיחו או הפריכו: $K-H$ מספר אינסופי.

לא נכון, למשל יהי H מס' אינסופי חיובי כלשהו, $K=H+1$, אזי $K-H=H+1-H=1$ כלומר זוהי דוגמא לכך שיוצא מספר סופי.

3. יהי H מספר אינסופי חיובי, K מספר אינסופי שלילי. הוכיחו או הפריכו: $H-K$ מספר אינסופי.

נכון. K אינסופי שלילי לכן $-K$ אינסופי חיובי (ראינו בתרגול) לכן קל לראות ש- $H+(-K)$ אינסופי (חיובי).

4. יהי H מספר אינסופי חיובי, b ממשי חיובי. הוכיחו או הפריכו: bH אינסופי חיובי.

נכון. לפי הגדרת מס' אינסופי חיובי, כדי להראות ש- bH אינסופי חיובי יש להראות כי bH גדול מכל מספר ממשי. יהי r מס' ממשי. H אינסופי חיובי לכן $H > \frac{r}{b}$, כלומר $bH > r$ כדרוש.

5. יהי ϵ אינפיניטסימל. הוכיחו או הפריכו: ϵ^2 אינפיניטסימל חיובי.

לא נכון. 0 הוא אינפיניטסימל ו- $0^2=0$ איננו חיובי.

6. יהי ϵ אינפיניטסימל שלילי. הוכיחו או הפריכו: ϵ^2 אינפיניטסימל חיובי.

נכון. ראשית, ϵ^2 הוא אינפיניטסימל כי ראינו כי כפל של אינפיניטסימליים הוא אינפיניטסימל. הוא חיובי כי בממשיים מתקיימת הנוסחה $a < 0 \rightarrow a^2 > 0$ ולפי עקרון ההעברה נקבל $\epsilon < 0 \rightarrow \epsilon^2 > 0$.

7. יהי H אינסופי חיובי, a סופי חיובי. הוכיחו או הפריכו: $H-a$ מספר חיובי.

נכון. H אינסופי חיובי לכן $H > r$ לכל מספר ממשי. ראינו בתרגול שיותר מכך מתקיים: $H > x$ לכל מספר סופי. בפרט עבור המספר הסופי a מתקיים $H > a$ כלומר $H-a > 0$ כלומר $H-a$ חיובי, כדרוש.

8. יהי ϵ אינפיניטסימל. הוכיחו או הפריכו: $1 > 2^{30}\epsilon$

נכון. ϵ אינפיניטסימל לכן הוא קטן מכל מס' ממשי חיובי. בפרט $\epsilon < \frac{1}{2^{30}}$ כלומר $2^{30}\epsilon < 1$ כדרוש.