הרצאה 1

נכתב על ידי נועם יערי

04.07.2016

הגדרה

משוואה דיפרנציאלית רגילה ממעלה n היא אוסף של הפונקציות המקיימות:

$$F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0$$

כאשר פתרון המשוואה הוא פונקציה $y(x)$ – פונקציה הגזירה לפחות n פעמים.

הגדרה

עבור המשוואה הדיפרנציאלית $F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0$,
משוואה בצורה הבאה נקראת הצורה הנורמלית של המשוואה:

$$y^{(n)}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

הגדרה

משוואה דיפרנציאלית נקראת לינארית $\Leftrightarrow$ היא לינארית ביחס ל – y ולכל גזרותיה.

דוגמאות

משוואה לינארית:

$$y'=y+\sin(x)$$

משוואות לא לינאריות:

$$y'=y^2$$
$$y'=\cos(y)$$
$$y\cdot y'=1$$

הגדרה

בעיית קושי היא משוואה דיפרנציאלית יחד עם תנאי התחלה בנקודה מסויימת:

$$\begin{cases} F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \\ y(x_0)=a_0 \\ y'(x_0)=a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}=a_{n-1} \end{cases}$$

הגדרה

נאמר שפונקציה F מקיימת את תנאי ליפשיץ אם ורק אם מתקיים:

$$\exists L\geq 0:\forall x_1,x_2\in dom(F):\ |F(x_1)-F(x_2)|\leq L\cdot|x_1-x_2|$$

נאמר שהפונקציה F היא רציפה פלוס ב – y אם ורק אם היא מקיימת את תנאי ליפשיץ ב – y.

הרצאה 1

נכתב על ידי נועם יערי

משפט קיום ויחידות

תהי בעיית קושי בצורה נורמלית, כלומר:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

כאשר F רציפה בנקודה x ורציפה פלוס בפונקציות $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ ובנוסף יהי תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y(x_0) = a_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

אזי, קיים פתרון אחד ויחיד לבעיית קושי.

הערה

את הוכחת המשפט נראה בהמשך הקורס.

הוכחה בהרצאה 12.

משוואת דיפרנציאליות מסדר ראשון

משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר ראשון: $F(x,y,y')=0$

צורתה הנורמלית של משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר ראשון: $y'=F(x,y)$.

בעיית קושי – משוואה כנ"ל ביחד עם תנאי התחלה: $y(x_0)=y_0$.

משפט קיום ויחידות עבור משוואות מסדר ראשון

תהי בעיית קושי בצורה הנורמלית:

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

כאשר $F(x,y)$ רציפה בתחום:

$$D \coloneqq \{|x-x_0|\le \alpha, |y-y_0|\le \beta\}$$

ומקיימת את תנאי ליפשיץ ב – y לכל x.

אזי, קיים פתרון אחד ויחיד לבעיית קושי בתחום

$$|x-x_0| \le \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}, \qquad M=\max\{f(x,y)\}$$

משוואות מסדר ראשון שאנו יכולים לפתור

1. $y'=f(x)$

$$y'=f(x) \Longrightarrow y(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0$$

2. משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון:

$$y'=f(x)\cdot y \Longrightarrow y(x)=y_0\cdot e^{\int_{x_0}^{x} f(x)dx}$$

דוגמה:

$$\begin{cases} y' = k\cdot y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

כלומר:

$$y(x)=y_0\cdot e^{\int_{x_0}^{x} kdx} = y_0\cdot e^{k(x-x_0)}$$

3. משוואה הניתנת להפרדה:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Longrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

דוגמה:

משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון:

$$y' = f(x) \cdot y \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int f(x)dx$$

נחשב:

$$\log|y| = \int f(x)dx + C$$

$$\Longrightarrow y(x) = e^{\int f(x)dx+C} = e^{\int f(x)dx} + e^{C} = K \cdot e^{\int f(x)dx}$$

דוגמה – חוק הצינון של ניוטון

בחדר בטמפרטורה אחידה של 20°C יש כוס עם טמפרטורה התחלתית של 100°C.

נגזרת פונקציית זמן הצינון היא:

$$T'(t) = u \cdot (20 - T), \qquad u \in \mathbb{R}$$

יש למצוא את $T(t)$.

נשתמש בהפרדה (משוואות מסוג 3):

$$\frac{dT}{dt} = u \cdot (20 - T)$$

$$\frac{dT}{20 - T} = udt$$

$$\int \frac{dT}{20 - T} = \int udt$$

$$-\log|20 - T| + C = \int udt$$

$$|20 - T| = e^{-\int udt+C} = e^{-ut} \cdot e^{C} = K \cdot e^{-ut}$$

$$\Longrightarrow 20 - T = K \cdot e^{-ut}$$

$$\Longrightarrow T = K \cdot e^{-ut} + 20$$

כעת נוכל לחשב את הקבוע לפי הנתון $T(0) = 100$:

$$100 = K \cdot e^{-u \cdot 0} = K + 20$$

$$\Longrightarrow K = 80$$

סך הכל:

$$\boxed{T(t) = 80 \cdot e^{-u \cdot t} + 20}$$

הערה

אפשר לראות שכש - $t \to \infty$ הפונקציה T שואפת ל - $20^{\circ}\mathrm{C}$ - טמפרטורת החדר.

כלומר לאחר הרבה זמן, טמפרטורת כוס הקפה תהיה כמעט זהה לטמפרטורת החדר בו מונח ספל הקפה.

משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון

תזכורת

משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון:

$$F(x, y, y') = 0$$

מחפשים פונקציה (גזירה) $y(x)$ המקיימת את המשוואה

תזכורת (משפט קיום ויחידות)

תהי בעיית קושי בצורה נורמלית:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר f רציפה בתחום $D := \{|x - x_0| < \alpha \,, |y - y_0| < \beta\}$, ומקיימת את תנאי ליפשיץ ביחס ל y –, כלומר, לכל $|x - x_0| < \alpha$ ולכל $|y_1 - y_0| < \beta$ ו - $|y_2 - y_0| < \beta$, מתקיים:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L \cdot |y_1 - y_2|$$

אזי, קיים פתרון יחיד $y(x)$ המקיים את המשוואה ואת תנאי ההתחלה.

תזכורת (משוואות ניתנות להפרדה)

$$y'(x) = f(y) \cdot g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \cdot g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\, dx + c$$

בפרט, משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון:

$$y'(x) = y \cdot g(x)$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$y(x) = c \cdot e^{\int g(x)\, dx}$$

פתרון יחיד לבעיית קושי לינארית הומוגנית מסדר ראשון:

$$\begin{cases} y'(x) = y \cdot g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

לכן, הפתרון הפרטי:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}$$

$$\blacksquare$$

היום, נלמד פתרון משוואות לינאריות אי הומוגניות מסדר ראשון, כלומר משוואות מהצורה: $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$, וכן משוואות ברנולי, ריקאטי, קלרו ומשוואות הומוגנית, כלומר משוואות מהצורה $y'(x) = f(y/x)$.

משוואה לינארית כללית מסדר ראשון

$$\boxed{\begin{cases} y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$

ישנן שתי שיטות לפתרון משוואות לינאריות מסדר ראשון:

1. <u>וריאציית מקדמים</u>
   א. נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$y' = -p(x) \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

   ב. ננחש פתרון למשוואה האי-הומוגנית מהצורה:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\square$$

דוגמה

$$\boxed{v'(t) + \frac{b}{m} \cdot v(t) = -10}$$

כאשר, $0 < b, m \in \mathbb{R}$ קבוע.

הערה

משוואה זו מתארת מהירות גוף הנופל עם התנגדות האוויר.

עפ״י החוק השני של ניוטון:

$$m \cdot v'(t) = F = -b \cdot v(t) - 10 \cdot m$$

$$\Downarrow$$

$$v'(t)+\frac{b}{m}\cdot v(t)=-10$$

פתרון

א. נפתור את המשוואה (הלינארית) ההומוגנית המתאימה:

$$v(t)=c\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

ב. נחפש פתרון מהצורה:

$$v(t)=c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

נגזור ונקבל:

$$v'(t)=c'(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}-\frac{b}{m}\cdot c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

נציב במשוואה:

$$c'(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}-\frac{b}{m}\cdot c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}+\frac{b}{m}\cdot c(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}=-10$$

$$\Downarrow$$

$$c'(t)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}=-10$$

$$\Downarrow$$

$$c'(t)=-10\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int c'(t)\,dt=\int -10\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$c(t)=-\frac{10\cdot m}{b}\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}+k$$

לכן:

$$v(t)=\left(-\frac{10\cdot m}{b}\cdot e^{\frac{b}{m}\cdot t}+k\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$v(t)=-\frac{10\cdot m}{b}+k\cdot e^{-\frac{b}{m}\cdot t}$$

■

2. <u>גורם אינטגרציה</u>

דוגמה

נפתור את המשוואה:

$$xy'+y=\cos(x)$$

פתרון

עפ"י כלל השרשרת:

$$(x \cdot y)' = xy' + y$$

לכן:

$$(x \cdot y)' = \cos(x)$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int (x \cdot y)'\, dx = \int \cos(x)\ dx$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot y = \sin(x) + c$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{\sin(x) + c}{x}$$

■

הערה

למשוואה $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$ תמיד קיים גורם אינטגרציה:

$$I(x) = e^{\int p(x)\, dx}$$

$$\Downarrow$$

$$I'(x) = p(x) \cdot I(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\big(y(x) \cdot I(x)\big)' = y'(x) \cdot I(x) + y(x) \cdot p(x) \cdot I(x)$$

■

פתרון

$$I(x) = e^{\frac{b}{m} \cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(v(t) \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t}\right)' = -10 \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t} = -\frac{10 \cdot m}{b} \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t} + k$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = \left(-\frac{10 \cdot m}{b} \cdot e^{\frac{b}{m} \cdot t} + k\right) \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t}$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = -\frac{10 \cdot m}{b} + k \cdot e^{-\frac{b}{m} \cdot t}$$

■

דוגמה

$$\begin{cases} y' + \lambda \cdot y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

פתרון

$$I(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

$$\Downarrow$$

$$y' \cdot e^{\lambda \cdot x} + \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot y = e^{x \cdot (\lambda+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(y \cdot e^{\lambda \cdot x}\right)' = e^{x \cdot (\lambda+1)}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int \left(y \cdot e^{\lambda \cdot x}\right)' dx = \int e^{x \cdot (\lambda+1)}\, dx$$

עבור $\lambda \neq -1$, נקבל:

$$y \cdot e^{\lambda \cdot x} = \frac{e^{x \cdot (\lambda+1)}}{1+\lambda} + c$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \frac{e^x + c \cdot (1+\lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{1+\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \frac{e^x + c \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{1+\lambda}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1 = y(0) = \frac{1+c}{1+\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$c = \lambda$$

לכן:

$$y(x)=\frac{e^x+\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{1+\lambda}$$

עבור $\lambda=-1$ נקבל:

$$y\cdot e^{\lambda\cdot x}=x+c$$

$$\Downarrow$$

$$y(x)=x\cdot e^x+c\cdot e^x$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1=y(0)=c$$

$$\Downarrow$$

$$c=1$$

לכן:

$$y(x)=(x+1)\cdot e^x$$

נחשב:

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)=\lim_{\lambda\to-1}\frac{e^x+\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{1+\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{\lambda\to-1}\frac{e^{-\lambda\cdot x}-x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)=e^x+x\cdot e^x$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\lambda\to-1}y(x)=(1+x)\cdot e^x$$

לכן, משפחת הפתרונות רציפה ב - $\lambda=-1$, וניתן להימנע מפתרון המשוואה עבור $\lambda=-1$. ■

משפחות נוספות של משוואות פתירות מסדר ראשון

1. משוואה הומוגנית.
2. משוואת ברנולי.
3. משוואת ריקטי (למצוא פתרון כללי באמצעות פתרון יחיד נתון).
4. משוואת קלרו.

משוואה הומוגנית (מסדר 0)

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

המשוואה פתירה דרך ההצבה:

$$z := \frac{y}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{y'(x) \cdot x - y(x)}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{y'(x) - \frac{y(x)}{x}}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

וקיבלנו משוואה ניתנת להפרדה.

דוגמה

$$x \cdot y' = x + y$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z \coloneqq \frac{y}{x}$$

$$f(z) = 1 + z$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{1}{x}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\int z'\,dx = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$z = \log|x| + c$$

$$y(x) = x \cdot z(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = x \cdot \log|x| + c \cdot x$$

$$\blacksquare$$

הערה

ניתן לפתור כל משוואה מהצורה:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{A \cdot x + B \cdot y + C}\right)}$$

הוכחה

תחילה, עבור משוואה מהצורה:

$$y' = f(a \cdot x + b \cdot y)$$

נציב:

$$z \coloneqq a \cdot x + b \cdot y$$
$$\Downarrow$$
$$z' = a + b \cdot y'$$
$$\Downarrow$$
$$z' = a + b \cdot f(z)$$

וקיבלנו משוואה ניתנת להפרדה.

כעת, עבור משוואה מהצורה:

$$y' = f\left(\frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{A \cdot x + B \cdot x + C}\right)$$

נציב:

$$\tilde{x} \coloneqq x + \alpha$$

$$\tilde{y} \coloneqq y + \beta$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{y}' = f\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right), \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{y}' = f(u \cdot \tilde{x} + v \cdot \tilde{y}), \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$

■

דוגמה

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot x + 4 \cdot y + 8}{x + 2 \cdot y - 3}\right)$$

מתקיים:

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot x + 4 \cdot y + 8}{x + 2 \cdot y - 3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot (x + 2 \cdot y) + 8}{(x + 2 \cdot y) - 3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = g(x + 2 \cdot y)$$

וקיבלנו משוואה הומוגנית.

■

דוגמה

$$y' = f\left(\frac{2 \cdot x + 3 \cdot y + 4}{x + y + 2}\right)$$

נרצה לקבל:

$$y' = g\left(\frac{u\cdot\tilde{x}+v\cdot\tilde{y}}{U\cdot\tilde{x}+V\cdot\tilde{y}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = g\left(\frac{u+v\cdot\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{U+V\cdot\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = h\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)$$

וקיבלנו משוואה הומוגנית.

כלומר, נרצה:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}-\alpha \\ y &= \tilde{y}-\beta \end{aligned}$$

כדי למצוא את α,β נפתור מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} (1): \quad -2\alpha-3\beta &= -4 \\ (2): \quad -\alpha-\beta &= -2 \end{aligned}$$

אי התלות הלינארית של המקדמים מניבה פתרון יחיד עבור α,β.

כאן:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

$$\blacksquare$$

משוואת ברנולי $(Bernoulli)$

$$\boxed{y' = a(x)\cdot y + b(x)\cdot y^{k+1}\,, k\in\mathbb{Z}}$$

נחלק ב - y^{k+1}:

$$\frac{y'}{y^{k+1}} = a(x)\cdot y^{-k} + b(x)$$

נציב:

$$z \coloneqq y^{-k}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = -k \cdot y^{-k-1} \cdot y'$$

לכן, המשוואה המקורית שקולה למשוואה:

$$-\frac{1}{k} \cdot z' = a(x) \cdot z + b(x)$$

וקיבלנו משוואה לינארית מסדר ראשון.

דוגמה

משוואה המתארת תנועה עם חיכוך ללא כוח נוסף:

$$v'(t) = -b \cdot v(t) + \nu \cdot v^3(t)\,, \qquad b, \nu \in \mathbb{R}$$

משוואת ריקטי $(Riccati)$

$$\boxed{y' = a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)}$$

נתון פתרון אחד למשוואה $y_0(x)$.

$$y_0' = a(x) \cdot y_0^2 + b(x) \cdot y_0 + c(x)$$

$$y' = a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$$

$$\Downarrow$$

$$(y_0 - y)' = a(x) \cdot (y_0^2 - y^2) + b(x) \cdot (y_0 - y)$$

$$\Downarrow$$

$$(y_0 - y)' = a(x) \cdot (y_0 + y) \cdot (y_0 - y) + b(x) \cdot (y_0 - y)$$

נציב:

$$y := y_0 + \frac{1}{z}$$

הצבה זו נותנת משוואת ברנולי עבור $y_0 - y$ (**תרגיל:** בדוק!).

■

הערה

אם $a(x) = 0$ משוואת ריקטי היא משוואה לינארית.

אם $c(x) = 0$ משוואת ריקטי היא משוואת ברנולי.

■

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

עד עתה, למדנו לפתור משוואת דיפרנציאליות מסדר ראשון, משוואות הניתנות להפרדה ומשוואות ליניאריות מסדר ראשון, שהפתרון שלהן מתבסס על טכניקות מתמטיות קלאסיות.

כעת, נלמד לפתור משוואות שהפתרון שלהן מתבסס על חוקי שימור מפיזיקה.

חוקי שימור (לשאול פיזיקאי)

דוגמה

$$\boxed{y''(t) = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(y)}$$

זוהי משוואה של מטוטלת, כאשר האנרגיה נשמרת.

$$E(y,t) = \frac{1}{2} m\ell^2 \cdot y'(t)^2 + mg\ell \cdot (1 - \cos(y))$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m\ell\big(\ell \cdot y'(t) \cdot y''(t) + g \cdot \sin(y) \cdot y'(t)\big) \\ &= m\ell y'(t) \cdot (\ell \cdot y''(t) + g \cdot \sin(y)) \end{aligned}$$

נשים לב כי :

$$y''(t) = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

לכן, כל פתרון למשוואה :

$$y''(t) = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin(y)$$

הוא פתרון למשוואה :

$$E(y,t) = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}m\ell^2\cdot y'(t)^2+mg\ell\cdot(1-\cos(y))=\text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\ell\cdot y'(t)^2+g\cdot(1-\cos(y))=c$$

וזו משוואה הניתנת להפרדה (!).

$$y'(t)=\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\cdot\sqrt{\cos y-c}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\cos y-c}}=\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\,dt$$

$$\blacksquare$$

דוגמה (מערכת $Lotka-Volterra$)

שתי פונקציות $p(t),q(t)$ מקיימות:

$$\boxed{\begin{cases}p'(t)=\alpha\cdot p(t)-\gamma\cdot p(t)\cdot q(t)\\ q'(t)=\gamma\cdot p(t)\cdot q(t)-\beta\cdot q(t)\end{cases}\quad,\quad\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}}$$

פתרון

$$H(p,q)=\beta\cdot\log p+\alpha\cdot\log q-\gamma\cdot(p+q)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\beta}{p}\cdot p'(t)+\frac{\alpha}{q}\cdot q'(t)-\gamma\cdot p'(t)-\gamma\cdot q'(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dH}{dt}=\left(\frac{\beta}{p}-\gamma\right)\cdot(\alpha\cdot p-\gamma\cdot p\cdot q)+\left(\frac{\alpha}{q}-\gamma\right)\cdot(\gamma\cdot p\cdot q-\beta\cdot q)$$

$$\frac{dH}{dt} \equiv 0$$

$\blacksquare$

משוואות דיפרנציאליות (לינאריות) מסדר גבוה (סדר שני)

משפט (קיום ויחידות)

תהי בעיית קושי בצורה נורמלית:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

כאשר f רציפה בסביבה של הנקודה $(x_0, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ ומקיימת את תנאי ליפשיץ ביחס ל – $\left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ ב - $\mathbb{R}^{n-1}$, כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ קבוע, מתקיים:

$$|f(x, b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}) - f(x, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})| \leq L \cdot \left||b_0 - c_0, b_1 - c_1, \cdots, b_{n-1} - c_{n-1}|\right|$$

אזי, **קיים** פתרון **יחיד** לבעיית קושי.

הגדרה

ניקח משוואה לינארית כללית מסדר n:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y + b(x)$$

אם $b(x) \equiv 0$ (או ש – $y(x) \equiv 0$ פתרון למשוואה), המשוואה נקראת **לינארית הומוגנית**.

משפט

1. הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית מסדר n מהווים מרחב ווקטורי n מימדי.
2. הפתרון הכללי למשוואה לינארית אי הומוגנית הוא מהצורה $y = y_h + y_p$, כאשר y_h הוא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית המתאימה, ו - y_p פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית.

הוכחה

1. <u>מרחב ווקטורי</u>

   עפ"י ההגדרה, $y(x) \equiv 0$ פתרון למשוואה ההומוגנית.

   אם y_1, y_2 פתרונות למשוואה ההומוגנית, אזי לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$ פתרון למשוואה ההומוגנית, עפ"י לינאריות הנגזרת:

$$y_1^{(n)}=a_{n-1}(x)\cdot y_1^{(n-1)}+a_{n-2}(x)\cdot y_1^{(n-2)}+\cdots+a_1(x)\cdot y_1'+a_0(x)\cdot y_1$$

$$y_2^{(n)}=a_{n-1}(x)\cdot y_2^{(n-1)}+a_{n-2}(x)\cdot y_2^{(n-2)}+\cdots+a_1(x)\cdot y_2'+a_0(x)\cdot y_2$$

$$\Downarrow$$

$$(y_1+y_2)^{(n)}=a_{n-1}(x)\cdot(y_1+y_2)^{(n-1)}+a_{n-2}(x)\cdot(y_1+y_2)^{(n-2)}+\cdots+a_1(x)\cdot(y_1+y_2)'+a_0(x)\cdot(y_1+y_2)$$

<u>n מימדי</u>

עפ״י משפט קיום ויחידות, קיים יחס של אחד לאחד בין פתרונות לתנאי התחלה ב - x_0.

תנאיי ההתחלה האפשריים $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ מהווים מרחב ווקטורי n מימדי, וההעתקה בין פתרונות לבין תנאי התחלה היא איזומורפיזם של מרחבים ווקטוריים.

כלומר, אם ניקח פתרונות $\{y_1,\cdots,y_n\}$ המקיימים:

$$y_1(x_0)=1\,,y_1'(x_0)=0\,,\cdots,y_1^{(n-1)}(x_0)=0$$

$$y_2(x_0)=0\,,y_2'(x_0)=1\,,\cdots,y_2^{(n-1)}(x_0)=0$$

$$\vdots$$

$$y_n(x_0)=0\,,y_n'(x_0)=0\,,\cdots y_n^{(n-1)}(x_0)=1$$

אזי, $\{y_1,\cdots,y_n\}$ בסיס למרחב הפתרונות.

■

דוגמה

$$\boxed{y''=-y}$$

פתרון כללי למשוואה:

$$y=A\cdot\sin(x)+B\cdot\cos(x)$$

תנאי התחלה ב - $x_0=0$:

$$\sin(0)=0\,,\cos(0)=1$$

$$\sin(0)'=1\,,\cos(0)'=1$$

$$\Downarrow$$

$$y=y(0)\cdot\sin(x)+y'(0)\cdot\cos(x)$$

■

2. $y-y_p$ פותר את המשוואה ההומוגנית (עפ״י לינאריות הנגזרת), לכן $y=y_p+y_h$.

■

דוגמה

$$\boxed{y''=-y+10}$$

ניקח:

$$y_p = 10$$

עפ"י המשפט:

$$y = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x) + 10$$

$$\blacksquare$$

הערה

תלות לינארית של $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ $\Leftrightarrow$ קיימים $c_1, c_2, \cdots, c_n$, לא כולם 0, כך שלכל x בתחום, $c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots + c_n \cdot y_n = 0$.

דוגמה

$$y_1(x) \coloneqq x$$

$$y_2(x) \coloneqq |x|$$

$\{y_1, y_2\}$ תלויות לינארית בתחום $[0,1]$, אך אינן תלויות לינארית בתחום $[-1,1]$.

הגדרה

בהינתן משוואה לינארית הומוגנית מסדר n וקבוצת פתרונות $\{y_1, \cdots, y_n\}$, נגדיר את הדטרמיננטה:

$$\boxed{\mathcal{W}(x) \coloneqq \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}$$

למה

אם $\{y_1, \cdots, y_n\}$ תלויים לינארית, אזי העמודות תלויות לינארית בכל x בתחום, לכן לכל x בתחום: $\mathcal{W}(x) = 0$.

משפט

אם $\mathcal{W}(x) = 0$ בנקודה אחת, אזי $\mathcal{W}(x) = 0$ בכל התחום.

משפט (אבל)

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\mathcal{W}}{dx} = a_{n-1}(x) \cdot \mathcal{W}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt}$$

הוכחה

עפ"י הגדרת הדטרמיננטה וכלל השרשרת:

$$\mathcal{W}'(x) = \overbrace{\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}^{0} + \overbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}^{0} + \cdots + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

נציב את המשוואה:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y$$

ונצמצם את כל המכפלות של השורות העליונות, כדי לקבל:

$$\mathcal{W}'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) & a_{n-1}(x) \cdot y_2^{(n)-1}(x) & \cdots & a_{n-1}(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}'(x) = a_{n-1}(x) \cdot \mathcal{W}'(x)$$

■

משוואות ליניאריות מסדר גבוה (סדר שני)

תזכורת

משוואה ליניארית מסדר גבוה היא משוואה דיפרנציאלית מהצורה:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y + b(x)$$

אם כל המקדמים $a_{n-1}(x), a_{n-2}(x), \cdots, a_0(x), b(x)$ רציפים, אזי משפט קיום ויחידות תקף, כלומר, בהינתן תנאי התחלה $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-2)}(x_0), y^{(n-1)}(x_0)$, קיים פתרון יחיד למשוואה המקיים את תנאי ההתחלה.

תזכורת

1. קבוצת כל הפתרונות למשוואה ליניארית הומוגנית מסדר n מהווה מרחב ווקטורי n מימדי.
2. פתרון כללי למשוואה ליניארית אי הומוגנית הוא מהצורה $y = y_h + y_p$, כאשר y_h פתרון כללי למשוואה ההומוגנית המתאימה ו – y_p פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית.

תזכורת (דטרמיננטת ורונקיאן)

עבור פונקציות $y_1, \cdots, y_n$, דטרמיננטת ורונסקיאן:

$$\boxed{\mathcal{W}(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}$$

תזכורת

$\mathcal{W}(x_0) = 0$ בנקודה אחת $\Leftrightarrow$ $\mathcal{W}(x) = 0$ בכל התחום.

תזכורת (משפט אבל)

$$\mathcal{W}'(x) = a_{n-1}(x) \cdot \mathcal{W}(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt}$$

הערה

כאשר מדובר על משוואה ליניארית הומוגנית מסדר 2:

$$\mathcal{W}(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x)=y_1\cdot y_2'-y_2\cdot y_1{}'$$

ניתן להשתמש בכך כדי להגיע מפתרון פרטי לפתרון כללי, שכן, y_1 נתון, $\mathcal{W}(x)$ ידוע מתנאי ההתחלה וממשפט אבל ו y_2 – פתרון למשוואה לינארית מסדר ראשון.

■

דוגמה

$$\boxed{y''-\frac{6}{x^2}\cdot y=0}$$

נמצא פתרון פרטי. ניקח :

$$y\coloneqq x^3$$

$$\Downarrow$$

$$y'=3x^2$$

$$\Downarrow$$

$$y''=6x$$

$$\Downarrow$$

$$y''-\frac{6}{x^2}\cdot y=6x-\frac{6}{x^2}\cdot x^3$$

$$y''-\frac{6}{x^2}\cdot y=0$$

לכן :

$$y_1(x)=x^3\,,y_1'=3x^2$$

פתרון פרטי למשוואה.

נפתור את בעיית קושי :

$$\begin{cases} y'' - \frac{6}{x^2} \cdot y = 0 \\ y(1) = c_1 \\ y'(1) = c_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(1) = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 3 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(1) = c_2 - 3c_1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(1) \cdot e^{\int_1^x 0\, dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(1)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) \coloneqq k$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} x^3 & y_2 \\ 3x^2 & {y_2}' \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$k = x^3 \cdot y_2' - 3x^2 \cdot y_2$$

נפתור בשיטת גורם אינטגרציה:

$$y_2' - \frac{3}{x} \cdot y_2 = \frac{k}{x^3}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = e^{\int -\frac{3}{x} dx}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = e^{-3\log|x|}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^3} \cdot y_2' - \frac{3}{x^4} \cdot y_2 = \frac{k}{x^6}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{x^3} \cdot y_2\right)' = \frac{k}{x^6}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^3} \cdot y_2 = -\frac{1}{5}k \cdot \frac{1}{x^5} + k_2$$

$$\Downarrow$$

$$y_2(x) = k_1 \cdot \frac{1}{x^2} + k_2 \cdot x^3$$

■

שיטות להפקת מידע נוסף ממידע חלקי

1. שיטת הורדת סדר

בהינתן פתרון יחיד למשוואה ההומוגנית המתאימה, נוריד את הבעיה למשוואה מסדר $n-1$.

2. שיטת וריאציית מקדמים

בהינתן כל הפתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה, נפתור את המשוואה האי הומוגנית.

3. פונקציית גרין

כלי לעבור מפתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה לפתרונות למשוואה האי הומוגנית.

משפט

תהי:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y + b(x)$$

משוואה לינארית מסדר n.

נניח שהפונקציה $y_0(x)$ פותרת את המשוואה ההומוגנית המתאימה.

אם נציב $y(x) = z(x) \cdot y_0(x)$, אזי $z'(x)$ פותר משוואה לינארית מסדר $n-1$.

הערה

הפתרון הכללי עבור z' הוא $n-1$ מימדי, לכן הפתרון הכללי עבור z הוא n מימדי.

דוגמה

$$\boxed{y'' - \frac{6}{x^2} \cdot y = x \cdot \log x}$$

$y_0(x) = x^3$ פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה (ראינו).

נציב:

$$y(x) = z(x) \cdot y_0(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y'(x) = z'(x) \cdot x^3 + z(x) \cdot 3x^2$$

$$\Downarrow$$

$$y''(x) = z''(x) \cdot x^3 + z'(x) \cdot 6x^2 + z(x) \cdot 6x$$

נציב במשוואה:

$$\left(x^3 \cdot z''(x) + 6x^2 \cdot z'(x) + 6x \cdot z(x)\right) - \frac{6}{x^2} \cdot \left(x^3 \cdot z(x)\right) = x \cdot \log x$$

נציב:

$$w \coloneqq z'$$

$$\Downarrow$$

$$x^3 \cdot w' + 6x^2 \cdot w = x \cdot \log x$$

$$\Downarrow$$

$$w' + \frac{6}{x} \cdot w = \frac{\log x}{x^2}$$

נפתור בשיטת גורם אינטגרציה:

$$I(x) = e^{6 \cdot \log|x|}$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = x^6$$

$$\Downarrow$$

$$(w \cdot x^6)' = x^4 \cdot \log|x|$$

$$\Downarrow$$

$$w \cdot x^6 = \int x^4 \cdot \log|x| \ dx$$

ניעזר באינטגרציה בחלקים, ונקבל:

$$w \cdot x^6 = \frac{x^5}{5} \cdot \log|x| - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} \ dx$$

$$\Downarrow$$

$$w \cdot x^6 = \frac{x^5}{5} \cdot \log|x| - \frac{x^5}{25} + c_1$$

$$w=\frac{\log|x|}{5x}=\frac{1}{25x}+\frac{c_1}{x^6}$$

$$\Downarrow$$

$$z=\frac{1}{10}\cdot(\log x)^2-\frac{1}{25}\cdot\log x-c_1\cdot\frac{1}{x^5}+c_2$$

$$\Downarrow$$

$$y=\overbrace{\frac{1}{10}\cdot x^3\cdot(\log x)^2-\frac{1}{25}\cdot x^3\cdot\log x}^{\text{פתרון כללי}}\overbrace{-c_1\cdot\frac{1}{x^2}+c_2\cdot x^3}^{\text{פתרון הומוגני כללי}}$$

■

משפט

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y + b(x)$$

משוואה לינארית אי הומוגנית ובסיס $\{y_1, \cdots, y_n\}$ לפתרונות המשוואה ההומוגנית הקשורה. אזי הפונקציה:

$$y(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n$$

פותר את המשוואה אם ורק אם:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \cdots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \cdots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

הוכחה

$\boxed{\Rightarrow}$

נובע מהמערכת:

$$\begin{cases} y'(x) = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2' + \cdots + c_n(x)y_n' \\ y''(x) = c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + \cdots + c_n(x)y_n'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-2)} + c_2(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-2)} \\ y^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)} \\ y^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)} + c_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)} + b(x) \end{cases}$$

נשים לב שהמערכת הזאת שקולה למשוואה:

$$w \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = w^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

דוגמה

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = x \cdot \log x$$

$$y_1(x) = x^3, y_1'(x) = 3x^2$$

$$y_2(x) = \frac{1}{x^2}, y_2'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} x^3 & \frac{1}{x^2} \\ 3x^2 & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$\Longrightarrow w^{-1}(x)=\begin{vmatrix}\frac{2}{5x^3} & \frac{1}{5x^2}\\ \frac{3}{5}x^2 & -\frac{x^3}{5}\end{vmatrix}$$

$\Longleftarrow$ הפתרון פותר

$$\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5x^3} & \frac{1}{5x^2}\\ \frac{3}{5}x^2 & -\frac{x^3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ x\cdot\log x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5x}\log x\\ -\frac{x^4}{5}\log x\end{pmatrix}$$

$$c_1(x)=\int\frac{1}{5x}\log x=\frac{1}{10}\log^2 x+c_1$$

$$c_2(x)=-\frac{1}{5}\left(\frac{x^5}{5}\log x-\frac{x^5}{25}\right)+c_2=-\frac{x^5}{25}\log x+\frac{x^5}{125}+c_2$$

$$\Longrightarrow\ y(x)=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2=$$

$$=\left(\frac{1}{10}\log^2 x+c_1\right)x^3+\left(-\frac{x^5}{5}\log x+\frac{x^5}{125}+c_2\right)\cdot\frac{1}{x^2}\ =$$

$$=\underbrace{\frac{1}{10}x^3\log^2 x-\frac{x^3}{25}\log x+\frac{x^3}{125}}_{\text{פתרון פרטי}}+c_2\cdot\frac{1}{x^2}+c_1x^3$$

מבוא לפונקציית גרין

$$\underbrace{y^{(n)}-a_{n-1}(x)y^{(n-1)}-a_{n-2}(x)y^{(n-2)}-\cdots-a_0(x)y}_{L_y}=b(x)$$

$$L\colon C^n\to C^0$$

עכשיו מחפשים פתרונות למשוואה $Ly=b$

$b(x)$ פונקציה רציפה נתונה. הגרעין של L הוא n מימדי (מרחב הפתרונות ההומוגניים).

נסתכל על המרחב:

$$\left\{f\in C^n: f(x)=0, f'(x)=0,\cdots,f^{(n-1)}(x)=0\right\}\subseteq C^n$$

$$L_y=y''(x)-a_1(x)y'-a_0(x)y$$

ורוצים למצוא אופרטור $M=L^{-1}$ על המרחב V. אם y_1,y_2 שני פתרונות בלתי תלויים לינארית למשוואה ההומוגנית הקשורה, כלומר

$$w(x)=\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}$$

לכן $c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$ פותר משוואה אי הומוגנית אם

$$w(x)\cdot\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}0\\ b(x)\end{pmatrix}$$

כלל קרמר :

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ b(x) & y_2'\end{vmatrix}}{\det\big(w(x)\big)}=-\frac{y_2(x)b(x)}{\det\big(w(x)\big)}$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & b(x)\end{vmatrix}}{\det\big(w(x)\big)}=\frac{y_1(x)b(x)}{\det\big(w(x)\big)}$$

הפתרון הכללי של המשוואה הוא :

$$\begin{aligned}&y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)=\\&=\int_{x_0}^{x}-\frac{y_2(t)b(t)dt}{[y_1y_2'-y_2y_1'](t)}\cdot y_1(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)b(t)dt}{[y_1y_2'-y_2y_1'](t)}\cdot y_2(x)=\\&=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{[y_1y_2'-y_2y_1'](t)}b(t)dt=\int_{x_0}^{x}G(x,t)b(t)dt\end{aligned}$$

תזכורת

משוואות ליניאריות מסדר גבוה

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

- פתרונות משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n מהווים מרחב וקטורי ממימד n.
- פתרון כללי למשוואה אי הומוגנית היא מהצורה $y = y_n + y_p$ כאשר y_p פתרון פרטי כלשהו ו - y_n פתרון כללי למשוואה ההומוגנית הקשורה.
- איך לנצל מידע חלקי:
  - הורדת סדר – אם y_0 פותר את המשוואה ההומוגנית מסדר n הקשורה ונציב $y = y_0 \cdot z$

    $\Leftarrow$ אזי z' פותר משוואה ליניארית מסדר $n-1$.
  - וריאציית מקדמים – בהינתן בסיס $\{y_1, \cdots, y_n\}$ למשוואה ההומוגנית הקשורה, זי $y = c_1(x)y_1 + \cdots c_n(x)y_n$ פותר את המשוואה האי הומוגנית $\Leftrightarrow$

$$w\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_{(n-1)(x)} \\ c_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

מבוא לפונקציית גרין

אם L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n ורוצים לפתור את המשוואה $L \cdot y = b(x)$ על תת מרחב שבו קיים פתרון יחיד. אזי $y = L^{-1}[b(x)]$ כאשר האופרטור ההופכי L^{-1} הוא מהצורה:

$$\boxed{L^{-1}[b(x)] = \int \overbrace{G(x,t)}^{\text{פונקציית גרין}} \ b(t)dt}$$

הסבר על L:

$$L[f'](x) = f^{(n)}(x) - a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) - \cdots - a_0(x)f(x)$$
$$L: C^n \to C^0$$

במקרה המיוחד של תת המרחב

$$\mathrm{V} = \{f \in C^n : f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\}$$

קיים פתרון יחיד למשוואה $Ly = b(x)$. ניתן למצוא אותו בהינתן בסיס של פתרונות הומוגניים באמצעות וריאציית מקדמים.

בכך, אפשר לחשב בצורה מפורשת את פונקציית גרין לבעיית קושי זו.

שאלה

האם ניתן להפוך את L תחת תנאי שפה במקום תנאי התחלה

דוגמה

$$\begin{cases} y'' = b(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y' = \int_0^x [b(t)]dt + c_1 \Longrightarrow$$ שוב אינטגרל וחישוב הקבוע בהתאם

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow Ly = y'' + y \text{ שאלת ערך עצמי של } \Longrightarrow Ly = -\lambda y$$

משוואות ליניאריות (הומוגניות) עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$
$$a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

דוגמה

$$y'' + a^2 y = 0$$
$$y(x) = A\sin(ax) + B\cos(ax)$$
$$y'' + b\underbrace{y'}_{\text{ריסון}} + ky, \quad b, k > 0$$

<u>רעיון ראשוני:</u>

ננסה אולי להציב:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

נציב במשוואה:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ke^{\lambda x} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

"פולינום אופייני"

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$$

הערה

אם מקבלים 2 פתרונות ממשיים שונים $\lambda_{1,2}$ אזי פתרון כללי יהיה מהצורה

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

מקרה תת קריטי

שני שורשים מרוכבים צמודים $\lambda = -\frac{b}{2} \pm iw$.

פתרון מעל המרוכבים:

$$y(x) = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2}+iw\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2}-iw\right)x}$$

תרגיל (שימוש בנוסחת אוילר: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$)

$\Leftarrow$ הצבת תנאי התחלה ממשיים $y(0), y'(0) \in \mathbb{R}$ נותן פתרון כללי

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2}x}(A \sin wx + B \cos wx)$$

מקרה קריטי של שורש כפול

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

למה

אופרטורים דיפרנציאליים עם מקדמים קבועים מתחלפים:

$$L_1(L_2 f) = L_2(L_1 f)$$

הערה

האופרטורים $L_1 f(x) = f'(x)$, $L_2 f(x) = x f(x)$ אינם מתחלפים:

$$L_1(L_2 f) \neq L_2(L_1 f)$$

הגדרה

$$Df = f'$$

למה

כל אופרטור דיפרנציאלי עם מקדמים קבועים הוא פולינום ב $-D$:

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y$$

$$\Updownarrow$$

$$L = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

$$D^n = D(D^{n-1})$$

משפט היסוד של אלגברה

כל פולינום מעל $\mathbb{R}$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים $x - a$ וגורמים ריבועיים אי פריקים $x^2 + bx + c$ כאשר $b^2 < 4ac$

למה

אם ל- L_1 ו- L_2 אין גורמים משותפים בפירוק כפולינומים אזי:

$$\ker(L_1 \circ L_2) = \ker L_1 \oplus \ker L_2$$

דוגמה

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$Ly = 0, L = D^2 + 2D - 3 = (D+3)(D-1)$$

הפתרונות למשוואות הנובעות:

$$(D+3)y = 0 \Longrightarrow y = c_1 e^{-3x}$$

$$(D-1)y = 0 \Longrightarrow y = c_2 e^{x}$$

$$\Longrightarrow y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$$

למה

אופרטורים דיפרנציאליים עם מקדמים קבועים מתחלפים:

$$L_1(L_2 f) = L_2(L_1 f)$$

למה

L אופרטור עם מקדמים קבועים

$$Ly = 0 \Longrightarrow L^{m+1}(x^m y) = 0$$

דוגמה

$$(D-1)^2 y = 0$$

$y = c_1 e^x$ פותר את המשוואה $(D-1)y = 0$ לכן מהלמה $(D-1)^2(xe^x) = 0$

הוכחת הלמה האחרונה

נוכיח באינדוקציה.

עבור $m = 0$ הטענה טריוויאלית, לכן נניח את נכונות הטענה עבור $k = 1,2,\cdots,m$.

$$L^{m+1}(x^m y) = L^m\big(L(x^m y)\big) = L^m\left(x^m L(y) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k L_k(y)\right)$$

וכל L_k אופרטור עם מקדמים קבועים.

על כל איבר אחר $L^m\left(x^k L_k(y)\right)$. מפעילים את הנחת האינדוקציה:

$$L^m\left(x^k L_k(y)\right) = 0 \Longleftarrow L\big(L_k(y)\big) = 0$$

מכיוון ש - $L\big(L_k(y)\big) = L_k\big(L(y)\big) = L_k(0) = 0$

דוגמה

$$(D^3+1)=y'''+y=0$$
$$D^3+1=(D+1)\underbrace{(D^2-D+1)}_{\text{אי-פריק}}$$

$$(D+1)y=0$$
$$y=c_1e^{-x}$$

$$(D^2-D+1)y=0$$
$\lambda^2-\lambda+1$ פולינום אופייני
$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Rightarrow y=e^{\frac{x}{2}}(A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_3e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

הערה

פתרנו את המשוואות הלינאריות הומוגניות מסדר כלשהו. את האי הומוגניות אפשר אז לפתור דרך וריאציית מקדמים. אם החלק האי הומוגני הוא מכפלה של המשפחות הבאות:

1. פולינומים
2. מעריכיות
3. $\sin wx, \cos wx$

א יש קיצור לפתרון המשוואה האי הומוגני. דרך הפתרון: ניקח אופרטור M המשמיד את $b(x)$ שלנו:

$$Ly=b(x)$$
$$\Longrightarrow MLy=0$$

כאשר M,L אופרטורים עם מקדמים קבועים.

משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים

משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים

תזכורת

משוואה הומוגנית היא משוואה מהצורה:

$$L(y) = 0$$

כאשר:

$$L(y) = a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y \, ; \quad a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$$

1. כל L הוא פולינום באופרטור $Dy = y'$, כלומר:

$$L = a_n \cdot D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot D + a_0$$

וניתן לפרקו, מעל $\mathbb{R}$, לרכיבים ליניאריים וריבועיים אי פריקים, כלומר:

$$\ker L = \bigoplus \ker \text{גורמים}$$

2. א. מתקיים:

$$(D - \alpha)y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$y = C \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

ב. מתקיים:

$$(D^2 + bD + c)y = 0$$

אם $b^2 < 4c$, אז השורשים הם $-b/2 \pm i\omega$ וכן:

$$y = e^{-\frac{b}{2}} \cdot (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$$

ג. מתקיים:

$$L\, y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$L^m\, (x^{m-1} y) = 0$$

■

משוואה אי הומוגנית עם מקדמים קבועים

ניתן לפתור בעזרת שיטת וריאציית מקדמים.

שיטת "המשמיד"

$$Ly = b(x)$$

כאשר $b(x)$ מורכב כמכפלה של פולינומים, פונקציות מעריכיות ופונקציות טריגונומטריות, "המושמדות" ע"י אופרטור עם מקדמים קבועים.

טבלת אופרטורים משמידים		
משפחה	**פונקציה**	**משמיד**
פולינום	$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	D^{n+1}
פונקציה מעריכית	$e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
פונקציה טריגונומטרית	$\sin(\omega x) \quad ; \quad \cos(\omega x)$	$D^2 + \omega^2$

דוגמה

$$\boxed{(D^2 + 3)y = e^x}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית הקשורה:

$$y_h = c_1 \cdot \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{3}x)$$

האופרטור "המשמיד":

$$M = D - 1$$

נפעיל את המשמיד:

$$(D - 1)(D^2 + 3)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = \overbrace{c_1 \cdot \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{3}x)}^{y_h} + c_3 \cdot e^x$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה מהצורה:

$$y_p = c_3 \cdot e^x$$

נגזור:

$$y_p' = c_3 \cdot e^x$$

$$y_p'' = c_3 \cdot e^x$$

נציב במשוואה:

$$(y_p'' + 3)y_p = e^x$$

$$\Downarrow$$

$$c_3 \cdot e^x + 3c_3 \cdot e^x = e^x$$

$$\Downarrow$$

$$c_3 = \frac{1}{4}$$

לכן, הפתרון הכללי למשוואה:

$$y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{4} \cdot e^x$$

■

דוגמה

$$\boxed{(D^2 + 1)y = x^2 + 4}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית הקשורה:

$$y_h = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$$

האופרטור המשמיד:

$$M = D^3$$

נפעיל את המשמיד:

$$D^3 \cdot (D^2+1)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x) + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

נגזור:

$$y_p' = 2c_1 \cdot x + c_2$$

$$y_p'' = 2c_1$$

נציב במשוואה:

$$\left(y_p''+1\right)y_p = x^2+4$$

$$\Downarrow$$

$$2c_1 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = x^2 + 4$$

$$\Downarrow$$

$$c_1x^2 + c_2x + 2c_1 + c_3 = x^2 + 4$$

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad c_1 = 1 \\ x &: \quad c_2 = 0 \\ 1 &: \quad 2c_1 + c_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 2$$

לכן, הפתרון הכללי למשוואה:

$$y = A \cdot sin(x) + B \cdot \cos(x) + x^2 + 2$$

■

דוגמה

$$\boxed{(D^2-4D+4)y=2\cdot e^{2x}+\cos(x)}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית הקשורה:

$$y_h=c_1\cdot e^{2x}+c_2\cdot x\cdot e_{2x}$$

האופרטור "המשמיד":

$$M=(D-2)\cdot(D^2+1)$$

נפעיל את "המשמיד":

$$(D-2)\cdot(D^2+1)\cdot(D-2)^3y=0$$

$$\Downarrow$$

$$(D^2+1)\cdot(D-2)^3y=0$$

$$\Downarrow$$

$$y=B_1\cdot\sin(x)+B_2\cdot\cos(x)+\overbrace{B_3\cdot e^{2x}+B_4\cdot x\cdot e^{2x}}^{y_h}+B_5\cdot x^2\cdot e^{2x}$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p=B_1\cdot\sin(x)+B_2\cdot\cos(x)+B_5\cdot x^2\cdot e^{2x}$$

נגזור:

$$y_p'=B_1\cdot\cos(x)-B_2\cdot\sin(x)+(2B_5\cdot x+2B_5\cdot x^2)\cdot e^{2x}$$

$$y_p''=-B_1\cdot\sin(x)-B_2\cdot\cos(x)+(4B_5\cdot x+4B_5\cdot x^2+2B_5+4B_5\cdot x)\cdot e^{2x}$$

נציב במשוואה, ונקבל:

$$2\mathrm{B}_5\cdot e^{2x}=2\cdot e^{2x}$$

$$\Downarrow$$

$$B_5=1$$

באופן דומה נקבל את B_1, B_2.

■

דוגמה

$$\boxed{y'' + b \cdot y' + y = \sin(\omega \cdot x)\ , \quad 0 < b \ll 1\,, \omega \in \mathbb{R}}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$y_h = e^{-\frac{b}{2} \cdot x} \cdot \left(A \cdot \sin\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \cdot x \right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} \cdot x \right) \right)$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p = c_1 \cdot \sin(\omega \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\omega \cdot x)$$

נגזור:

$$y_p' = c_1 \omega \cdot \cos(\omega \cdot x) - c_2 \omega \cdot \sin(\omega \cdot x)$$

$$y_p'' = -c_1 \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot x) - c_2 \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot x)$$

נציב במשוואה, ונקבל:

$$\begin{array}{ll} \sin(\omega x): & -c_1\omega^2 - bc_2\omega + c_1 = 1 \\ \cos(\omega x): & -c_2\omega^2 + bc_1\omega + c_2 = 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = \frac{bc_1\omega}{\omega^2 - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1(1 - \omega^2) - \frac{b^2\omega^2 c_1}{\omega^2 - 1} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 \left(\frac{(1 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}{1 - \omega^2} \right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = \frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = -\frac{b\omega}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

לכן:

$$y_p = \frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \cdot \sin(\omega x) - \frac{b\omega}{(1-\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \cdot \cos(\omega x)$$

כאשר $\omega \longrightarrow 1$:

$$y_p = -\frac{1}{b} \cdot \cos(x)$$

הערה

תופעה זו נקראת **תהודה**, כאשר מניעים מערכת מחזורית בתדר הנכון, מקבלים תנודות גדולות מאוד.

■

משפט קיום ויחידות לבעיית קושי (עבור משוואה אחת מסדר ראשון)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f רציפה בתחום $D = \{|x - x_0| \le \alpha \ , \ |y - y_0| \le \beta\}$ ומקיימת את תנאי לישפיץ בתחום D,
כלומר, קיים L כך שלכל $y_1, y_2 \in \{y_0 - \beta, y_0 + \beta\}$ ולכל $|x - x_0| \le \alpha$ מתקיים:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$$

אזי, **קיים** פתרון **יחיד** בתחום $|x - x_0| \le \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\sup|f|}\right\}$.

הוכחה

נפעל בשלבים.

<u>שלב א'</u>: המרה למשוואה אינטגרלית.

מתקיים:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

נוכיח כי קיים פתרון יחיד למשוואה אינטגרלית זו.

$$\square$$

<u>שלב ב'</u>: הגדרת סדרת פונקציות.

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\, dt$$

אינטואיציה

נגדיר:

$$T\big(g(x)\big) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, g(t)\big)\, dt$$

נוכיח שהוא אופרטור מכווץ:

$$||Tg_1 - Tg_2||_\infty < c \cdot ||g_1 - g_2||_\infty\,, \quad 0 < c < 1$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\ dt \right| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \sup\ |f| \\ &\leq \beta \end{aligned}$$

אינדוקציה מראה כי לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y_n מוגדרת (ואפילו רציפה וגזירה).

$\square$

<u>שלב ג'</u>: להוכיח כי הסדרה $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנס במידה שווה.

<u>טענה</u>

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \sup\ |f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>הוכחה</u>

באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0(t)\big)\ dt \right| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \sup\ |f| \end{aligned}$$

אינטואיציה

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x)-y_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left[f\big(t,y_n(t)\big)-f\big(t,y_{n-1}(t)\big)\right]\,dt\right| \\ &\leq |x-x_0|\cdot\left|\left|f\big(t,y_n(t)\big)-f\big(t,y_{n-1}(t)\big)\right|\right| \\ &\leq |x-x_0|\cdot L||y_n-y_{n-1}|| \end{aligned}$$

זוהי הוכחה לכך שהאופרטור מכווץ.

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x)-y_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left[f\big(t,y_n(t)\big)-f\big(t,y_{n-1}(t)\big)\right]\,dt\right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x}\left|f\big(t,y_n(t)\big)-f\big(t,y_{n-1}(t)\big)\right|\,dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} L\cdot|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\,dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x}\sup|f|\cdot L^n\cdot\frac{|x-x_0|^n}{n!}\,dt \\ &\leq \sup|f|\cdot L^n\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$\square$

לכן:

$$||y_{n+1}-y_n||_\infty \leq \sup|f|\cdot L^n\cdot\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

נסמן:

$$M_n \coloneqq \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$$

עפ"י הגדרת סדרת הפונקציות $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$y_N \quad = \quad y_0 + \sum_{n=1}^{N} (y_n - y_{n-1})$$

לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$||y_{n+1} - y_n||_\infty \quad \leq \quad M_n$$

מתקיים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad < \quad \infty$$

עפ"י מבחן ה $-M$ של ויירשטרס, הסדרה $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה.

נסמן : $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{u} y$.

□

<u>**שלב ד'**</u> : להוכיח כי y פותר את המשוואה.

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) \quad = \quad y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\ dt$$

$$= \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f\big(t, y_n(t)\big)\ dt$$

$$= \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\right)\ dt$$

$$= \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\ dt$$

לכן :

$$y(x) \quad = \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\ dt$$

$$\square$$

<u>שלב ה'</u>: הוכחת יחידות.

יהי $\mathscr{y}$ פתרון.

$$\mathscr{y}(x) \quad = \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \mathscr{y}(t)\big)\ dt$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
|\mathscr{y} - y_0| \quad &= \quad \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, \mathscr{y}(t)\big)\ dt\right| \\
&\le \quad |x - x_0| \cdot \sup|f|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathscr{y} - y_n| \quad &= \quad \left|\int_{x_0}^{x} \Big[f\big(t, \mathscr{y}(t)\big) - f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\Big]\ dt\right| \\
&\le \quad \int_{x_0}^{x} \Big|f\big(t, \mathscr{y}(t)\big) - f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\Big|\ dt \\
&\le \quad \int_{x_0}^{x} L \cdot |\mathscr{y}(t) - y_{n-1}(t)|\ dt \\
&\le \quad \int_{x_0}^{x} \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!}\ dt \\
&\le \quad \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

לכן:

$$|\mathcal{y} - y_n| \quad \leq \quad \sup|f| \cdot L^n \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

לכן:

$$\mathcal{y} = y$$

$$\square$$

לכן, **קיים** פתרון **יחיד** לבעיית קושי בתחום $|x - x_0| \leq \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\sup|f|}\right\}$.

$$\blacksquare$$

הרצאה 13

נכתב על ידי נועם יערי

27.07.2016

משפט קיום ויחידות עבור מערכת של n משוואות מסדר 1

סימונים:

$$\vec{y}(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\right)$$
$$\vec{y}'(x) = \left(y_1'(x), y_2'(x), \cdots, y_n'(x)\right)$$

אזי:

$$\vec{y}'(x) = f(x, \vec{y}) = (f_1(x, \vec{y}), f_2(x, \vec{y}), \cdots, f_n(x, \vec{y})$$

מערכת משוואות, כלומר:

$$y_1'(x) = f_1(x, y_!, \cdots, y_n)$$
$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n'(x) = f_n(x, y_1, \cdots, y_n)$$

בעיית קושי היא מערכת כזו עם קביעת תנאי התחלה:

$$y_1(x_0) = c_1$$
$$y_2(x_0) = c_2$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0) = c_n$$

משפט

אם $f_1, \cdots, f_n$ רציפות בכל התחום $\{|x - x_0| \leq \alpha,\ |y_i - c_i| \leq \beta_i\}$ מתקיים תנאי ליפשיץ ב - $\vec{y}$ עבור כל f_i בכל x, כלומר:

$$|f_i(x), \vec{y}_1) - f_i(x, \vec{y}_2)| \leq L \cdot ||\vec{y}_1 - \vec{y}_2||_{\mathbb{R}^n}$$

אזי קיים פתרון למערכת, הפתרון יחיד והוא בתחום:

$$|x - x_0| \leq \min\{\alpha, \frac{\beta_1}{\sup|f_1|}, \cdots, \frac{\beta_n}{\sup|f_n|}\}$$

הערה

משוואה מסדר n

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

שקולה למערכת n משוואות מסדר ראשון:

$$y_n'(x) = F(x, y_1, y_2, \cdots y_n)$$
$$y_1' = y_2$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1}' = y_n$$

הערה

מעכשיו, כל המערכות לינאריות

- משפט ליוביל – אוסטרוגרדסקי – Liouville Ostrogradski (אנלוגי למשפט אבל)

-וריאציית מקדמים (פתרון מערכת אי – הומוגנית באמצעות פתרון כללי הומוגני)

-תיאור קבוצת פתרונות למערכת הומוגנית (מרחב וקטורי n מימדי), למערכת אי הומוגנית (מרחב וקטורי + פתרון פרטי)

משפט

מערכת לינארית היא הומוגנית $\Leftrightarrow$ $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ $\Leftrightarrow$ הווקטור הבא פותר את המערכת:

$$\begin{cases} y_1(x) \equiv 0 \\ y_2(x) \equiv 0 \\ \quad\vdots \\ y_n(x) \equiv 0 \end{cases}$$

מערכת אי - הומוגנית

$$y'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

כאשר $\vec{b}(x)$ וקטור של פונקציות ב – x בלבד.

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

הערה

ברור שקבוצת הפתרונות למערכת לינארית הומוגנית מהווה מרחב וקטורי.

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}$$

$$\vec{z}' = A(x)\vec{z}$$

$$(\vec{y}+\vec{z})' = A(x)(\vec{y}+\vec{z})$$

$$\alpha\vec{y}' = A(x)\cdot\alpha\cdot\vec{y}$$

המרחב הוא n מימדי כי משפט קיום ויחידות נותן איזומורפיזם עם קבוצת תנאי ההתחלה שהיא $\mathbb{R}^n$.

כמו כן, הפרש בין 2 פתרונות למערכת אי הומוגנית פותר את המשוואה ההומוגנית, ולכן פתרון כללי הוא:

$$\vec{y} = \underbrace{\vec{y}_h}_{\text{פתרון כללי למערכת ההומוגנית}} + \underbrace{\vec{y}_p}_{\text{פתרון פרטי למערכת האי הומוגנית}}$$

פתרון יסודי למערכת n משוואות מסדר ראשון ביחס לנקודה x_0:

$$Y = \begin{pmatrix}\vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \cdots & \vec{y}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1\\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \cdots & (y_n)_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1)_n & (y_2)_n & \cdots & (y_n)_n\end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\vec{y}_1(x_0) = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vec{y}_n(x_0) = e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

או במילים אחרות, $Y(x_0) = I$. לכל מטריצה הפיכה קבועה C ניתן להשתמש גם במטריצה $Y(x)\cdot C$ אבל לרוב נוח יותר להשתמש ב $-Y$.

הפתרון היסודי הוא האנלוג שלנו לוורונסקיאן (כאשר $y_n = y^{(n-1)}$ מקבלים את הוורונסקיאן המוכר).

משפט (Liouville Ostrogradski)

$$\Delta(x) := \det Y(x)$$

כאשר Y הוא פתרון [יסודי] על מערכת לינארית הומוגנית מסדר n:

$$\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y}$$

אזי:

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = -Tr\left(A(x)\right) \cdot D(x)$$

ולכן:

$$\Delta(x) = \Delta(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} Tr\left(A(x)\right) \cdot dx}$$

הערה

$$y'' = p(x)y' + q(x)y$$

אם נסמן:

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y'$$
$$y_1' = 0 \cdot y_1 + y_2$$
$$y_2' = q(x)y_1 + p(x)y_2$$
$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x)_{=trace} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

הוכחת Liouville Ostrogradski:

העתק של הוכחת משפט אבל:

$$\Delta'(x) = \overbrace{\begin{vmatrix} (y_1)_1' & (y_2)_1' & \cdots & (y_n)_1' \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \cdots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_1)_n & \cdots & \cdots & (y_n)_n \end{vmatrix}}^{a_{11}(x) \cdot \Delta(x)} + \cdots + \begin{vmatrix} (y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_1)_{n-1} & (y_2)_{n-1} & \cdots & (y_2)_{n-1} \\ (y_1)_n & \cdots & \cdots & (y_n)_n \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(x)(y_i)_1 + \underbrace{a_{12}(x)(y_i)_2 + \cdots + a_{1n}(x)(y_i)_n}_{\text{התרומה של אלו מתבטלת בדטרמיננטה הראשונה}}$$

דוגמה

ניקח את המערכת

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

ונבדוק שהזוג הבא $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ פותר:

(כלומר, $y(x) \equiv 1$, $z(x) \equiv x$)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

הערה

נשים לב:

$$Tr \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix} \equiv 0$$

מליוביל נקבל:

$$\Delta(x) = C_1$$
$$\Longrightarrow C_1 = \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & y(x) \\ x & z(x) \end{vmatrix} = z(x) - x \cdot y(x) = C_1$$

מהמערכת רואים ש – $y' = y - \frac{1}{x} z$

$$\Longrightarrow y'(x) = -\frac{C_1}{x}$$
$$\Longrightarrow y(x) = -C_1 \log x + C_2$$
$$\Longrightarrow z(x) = -C_1 x \log x + C_2 x + C_1$$

נכתב על ידי נועם יערי

וריאציית מקדמים

בהינתן $$Y=\begin{pmatrix}(y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1\\ (y_1)_2 & \ddots & \cdots & (y_n)_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1)_n & (y_2)_n & \cdots & (y_n)_n\end{pmatrix}$$

כלומר, בהינתן בסיס למרחב הפתרונות למערכת ההומוגנית $\vec{y}'=A(x)\vec{y}+\vec{b}(x)$.

הערה: לכל וקטור של קבועים $\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_n\end{pmatrix}$:

$$Y\vec{C}=\begin{pmatrix}(y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1\\ (y_1)_2 & \ddots & \cdots & (y_n)_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1)_n & (y_2)_n & \cdots & (y_n)_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_n\end{pmatrix}=C_1\overrightarrow{y_1}+C_2\overrightarrow{y_2}+\cdots+C_n\overrightarrow{y_n}$$

הוא גם פתרון למערכת ההומוגנית.

אם נציב $Y(x)\cdot\vec{C}(x)$ ונגזור נקבל:

$$\left(Y(x)\cdot\vec{C}(x)\right)'=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x)=A(x)Y(x)\vec{C}(x)+Y(X)\vec{C}'(x)$$

$$=A(x)(\text{פתרון})+\vec{b}(x)$$

$\Leftarrow$ ננצח אם $Y(x)\cdot\vec{C}'(x)=\vec{b}(x)\Leftrightarrow\vec{C}'(x)=Y^{-1}(x)\vec{b}(x)$.

דוגמה

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

בסיס אפשרי לפתרונות ההומוגניים הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}\right\}$$

נמצא עכשיו פתרון כללי למערכת האי הומוגנית עבור $\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ -2e^{2x} & -e^{x} \end{pmatrix},$$

$$\det Y = e^{3x}$$

$$Y^{-1} = e^{-3x}\begin{pmatrix} -e^{x} & -e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2x} & -e^{-2x} \\ 2e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

לכן מווריאציית מקדמים:

$$\vec{y} = C_1(x)\begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = Y^{-1}\cdot\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} -e^{-2x} & -e^{-2x} \\ 2e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+x)e^{-2x} \\ (2+x)e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$C_1(x) = \int -(1+x)e^{-2x}dx + K_1$$

$$C_2(x) = \int (2+x)e^{-x}dx + K_2$$

$$C_1(x) = -\int e^{-2x}dx - \int xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}e^{-2x} - \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + K_1 = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + K_1$$

$$C_2(x) = \int 2e^{-x}dx + \int xe^{-x}dx = -2e^{-x} + (-x)e^{-x} + \int e^{-x}dx =$$

$$= -3e^{-x} - xe^{-x} + K_2$$

לכן פתרון כללי למשוואה האי הומוגנית היא:

$$Y(x)\cdot\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ -2e^{2x} & -e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + K_1 \\ -3e^{-x} - xe^{-x} + K_2 \end{pmatrix} = \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{9}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + K_1\cdot\begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix} + K_2\cdot\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}$$

תזכורת - מערכות של משוואות ליניאריות מסדר ראשון

- משפט ליוביל (אנלוגי למשפט אבל)
- וריאציית מקדמים (אנלוגי למשוואה מסדר גבוה)

- כל משוואה מסדר גבוה ניתן לכתוב במערכת מסדר ראשון

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1(x) & a_2(x) & \cdots & \cdots & a_n(x) \end{pmatrix} y$$

- קיום: מערכות עם מקדמים קבועים $y' = Ay$ כאשר A מטריצה עם מקדמים ב - $\mathbb{R}$ וגם מערכת אי הומוגנית $y' = Ay + \vec{b}(x)$, כאשר $\vec{b}(x)$ מכיל פונקציית המושמדות על ידי אופרטור דיפרנציאלי עם מקדמים קבועים (לדוגמה פולינומים).

דוגמה 1

מטריצה אלכסונית:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} y$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 3y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{2x} \\ y_2(x) = c_2 e^{3x} \end{cases}$$

דוגמה 2

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} y$$

$$\Longrightarrow y_2' = 3y_2 \Longrightarrow y_2 = c_2 e^{3x} \Longrightarrow y_1' = 2y_1 + c_2 e^{3x}$$

תזכורת

אם מטריצה A לכסינה אזי:

$$A = P^{-1}DP$$

כאשר D מטריצה אלכסונית, P מטריצת שינוי בסיס (עמודותיה הם הוקטורים העצמיים)

לא כל מטריצה לכסינה, אך מעל כל שדה סגור אלגברית ($\mathbb{C}$) ניתן "כמעט ללכסן":

$$A = P^{-1}JP$$

כאשר:

$$J = \begin{pmatrix} (\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_4) \end{pmatrix}$$

לדוגמה,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אינה לכסינה אך ניתן למצוא את צורת הז'ורדן שלה.

הערה

$$y' = Ay$$

אם $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ, כלומר:

$$Av = \lambda v$$

אם ניקח:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda x} \\ v_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{y}' = \lambda y$$

לכן נקבל:

$$y' = Ay = \lambda y$$

דוגמה 1

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} y$$

המטריצה לכסינה:

פולינום אופייני:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 1,2$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 2:}$

$$\ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} e^x, \qquad \begin{pmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

פותרים. לכן הפתרון הכללי הוא:

$$\vec{y}(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 2

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} y$$

הפולינום האופייני:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 3i$$

$\underline{\lambda = 3 + 3i:}$

$$\ker \begin{pmatrix} 1 - 3i & -2 \\ 5 & -1 - 3i \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 3i \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 3 - 3i:}$

בגלל ש- $3 - 3i$ צמוד של הערך העצמי השני הוקטורים העצמיים המתאימים להם גם צמודים. לכן:

$$= c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} e^{(3-3i)x}$$

סך הכל, פתרון כללי:

$$y(x) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} e^{(3+3i)x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} e^{(3-3i)x}}_{\overline{y_1}}$$

לפי נוסחת אוילר:

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3x}(\cos 3x + i\sin 3x) =$$
$$= \begin{pmatrix} 2e^{3x}\cos 3x + 2ie^{3x}\sin 3x \\ e^{3x}(\cos 3x + 3\sin 3x) + ie^{3x}(\sin 3x - 3\cos 3x) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow y(x) = K_1 e^{3x}\begin{pmatrix} 2\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} + K_2 e^{3x}\begin{pmatrix} 2\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix}$$

דוגמה 3

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y$$

פולינום אופייני:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$\lambda = 2$ ערך עצמי יחיד (כפול)

$$\ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow y_1(x) = c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מובטח (מסיבות שיהיו ברורות בהמשך ההרצאה) פתרון מהצורה:

$$y(x) = \begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} e^{2x} = \begin{pmatrix} a+bx \\ c-bx \end{pmatrix} e^{2x}$$
$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2a+2bx+b \\ 2c+2dx+d \end{pmatrix} e^{2x}$$
$$Ay(x) = e^{2x}\left[A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ll} 1. & A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix} \\ x. & A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 2d \end{pmatrix} \end{array}$$

מהמשוואה של x נקבל ש - $b = -d$ מכיוון ש - $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A (אם נוציא 2 סקלר

מהמטריצה באגף ימין נקבל $A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ו – 2 ערך עצמי לכן הוא וקטור עצמי המתאים ל-2)

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \Longrightarrow c = -a-b$$

לכן פתרון כללי: $y(x) = \begin{pmatrix} a+bx \\ -a-b-bx \end{pmatrix} e^{2x}$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$.

צורת פתרון כללי במקרה הכללי

$$y' = Ay$$

$$\Updownarrow$$

$$(My)' = My' = MAy = MAM^{-1}\,My$$

הצבה : $z \coloneqq My, B \coloneqq MAM^{-1}$

$$\Updownarrow$$

$$z' = Bz$$

ניקח B להיות מטריצת ז׳ורדן (M מטריצה מז׳רדנת) והמערכת מתפצלת לבלוקים :

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} y$$

לדוגמה,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

מתפצל ל - :

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y, \qquad z' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} z$$

הטענה היא :

$$y' = J(\lambda)_{n\times n\ \text{ז׳ורדן}}\, y, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

אזי הפתרון הכללי הוא מהצורה :

$$\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

כאשר כל $p_j(x)$ פולינום מדרגה $(n-1)$.

נפתור שורה – שורה:

$$y_n' = \lambda y_n \Longrightarrow y_n = c_n e^{\lambda x}$$
$$y_{n-1} = \lambda y_{n-1} + y_n$$
$$\Longrightarrow \left(y_{n-1}e^{-\lambda x}\right)' = c_n$$
$$y_{n-1}e^{-\lambda x} = c_n x + c_{n-1}$$
$$\Longrightarrow y_{n-1} = e^{\lambda x}(c_n x + c_{n-1})$$

פתרון כללי למערכת:

$$y' = J(\lambda)_{n\times n\ \text{ז'ורדן}}\, y$$

הוא:

$$y(x) = e^{\lambda x}\left[c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}x\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right]$$

הפתרון למערכת:

$$y' = Ay$$

האקספוננט המטריציונלי הוא:

$$\vec{y} = e^{Ax}\overrightarrow{y_0}$$

כאשר עבור מטריצה קבועה M נגדיר:

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^k}{k!}$$
$$A = PDP^{-1}$$
$$A^k = PD^kP^{-1}$$
$$e^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}} = e^{\lambda}\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{n!}\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

סיכום

1. ניתן לפתור מערכת עם מקדמים קבועים בצורה ישירה אם היא לכסינה:

$$y(x) = \sum c_j \vec{v}_j \cdot e^{\lambda j}$$

2. ערכים עצמיים מרוכבים באים בזוגות צמודים (יחד עם הוקטורים העצמיים שלהם) וניתן לקחת חלק ממשי וחלק מדומה כפתרונות בלתי תלויים לינארית.
3. ריבוי בערך עצמי, מעבר למימד המרחב העצמי $\Leftarrow$ מדביקים פולינום מדרגת הניוון. אפשר דרך צורת ז'ורדן, דרך אקספוננט מטריציונלי, או דרך "ניחוש" + הצבה במשוואה.

דוגמה

$$x' = \lambda - dx$$
$$y' = -\alpha y$$
$$v' = ky - uv$$

$$\Longrightarrow y = y_0 e^{-\alpha t}$$
$$v' = ky - uv$$
$$\Longrightarrow v = v_0 \cdot \frac{ue^{-\alpha t} - ae^{-\alpha t}}{u - \alpha}, \qquad 0 = ky_0 - uv_0, \qquad v_0 = \frac{k}{4} y_0$$
$$v \sim v_0 e^{-\alpha t}$$

<u>מערכות לינאריות עם מקדמים קבועים</u>

מערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$\overrightarrow{y'} = A\,\vec{y}$$

מערכת לינארית אי הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$\overrightarrow{y'} = A\,\vec{y} + \vec{b}(x)$$

ניתן לפתור מערכת לינארית אי הומוגנית עם מקדמים קבועים ע"י וריאציית מקדמים.

שיטת "המשמיד"

ניתן לנחש צורת פתרון פרטי למערכת האי הומוגנית, להציב במשוואה ולחשב את המקדמים.

דוגמה

$$\boxed{y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}}$$

תחילה, נפתור את המערכת ההומוגנית המתאימה:

$$y' = y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y$$

- הפולינום האופייני:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

- הערכים העצמיים:

$$\lambda = 2$$

והוא ערך עצמי כפול.

- הווקטורים העצמיים:

$$\ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$y = \begin{pmatrix} a + bx \\ c - bx \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

נגזור:

$$y' = \begin{pmatrix} 2a+2bx+b \\ 2c-2bx-b \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{pmatrix} 2a+2bx+b \\ 2c-2bx-b \end{pmatrix} \cdot e^{2x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+bx \\ c-bx \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

לכן:

$$(1): \quad 2a+b \quad = \quad a-c$$

$$(2): \quad 2c-b \quad = \quad a+3c$$

$$\Downarrow$$

$$a+b \quad = \quad -c$$

לכן:

$$y_h = \begin{pmatrix} a+bx \\ -a-b-bx \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \quad ; \quad a,b \in \mathbb{R}$$

$$\square$$

כעת, נפתור את המערכת האי הומוגנית.

נפתור בשתי הדרכים.

<u>וריאציית מקדמים</u>

ניקח שני פתרונות בלתי תלויים לינארית למשוואה ההומוגנית המתאימה.

$$a=1, b=0: \quad y_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

$$a=0, b=1: \quad y_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} x \\ -1-x \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} \quad &= \quad \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & (-1-x)e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & -1-x \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix}c_1(x)\\ c_2(x)\end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix}{c_1}'\\ {c_2}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}$$

נפתור את הערכת ע"י כלל קרמר.

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_1 &= \begin{pmatrix}x & xe^{2x}\\ 1 & (-1-x)e^{2x}\end{pmatrix}\\ \mathcal{Y}_2 &= \begin{pmatrix}e^{2x} & x\\ -e^{2x} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נחשב:

$$\begin{aligned}\det\mathcal{Y} &= -e^{4x}\\ \det\mathcal{Y}_1 &= e^{2x}\cdot(-x^2-2x)\\ \det\mathcal{Y}_2 &= e^{2x}\cdot(1+x)\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}c_1'(x) &= \frac{\det\mathcal{Y}_1}{\det\mathcal{Y}}\\ &= (x^2+2x)\cdot e^{-2x}\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה, ונקבל:

$$\begin{aligned}c_1(x) &= \int(x^2+2x)\cdot e^{-2x}\,dx\\ &\overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{-2x}-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+k_1\end{aligned}$$

(1): אינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned}c_2'(x) &= \frac{\det\mathcal{Y}_2}{\det\mathcal{Y}}\\ &= (-1-x)\cdot e^{-2x}\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה, ונקבל:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int (1-x)\cdot e^{-2x}\,dx \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+k_2 \end{aligned}$$

(1) : אינטגרציה בחלקים.

לכן, הפתרון הכללי :

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \\ &= e^{2x}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & -1-x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{4} \end{pmatrix}\cdot e^{-2x}+\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x \end{pmatrix}+\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן :

$$y = \overbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x \end{pmatrix}}^{\text{פתרון אי הומוגני פרטי}} + \overbrace{\mathcal{Y}\cdot\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}^{\text{פתרון הומוגני כללי}}$$

רצוי להציב במשוואה ולבדוק.

$\square$

<u>שיטת "המשמיד"</u>

אין גורם חופף בין האופרטורים המשמידים, לכן קיים פתרון מהצורה :

$$y_p = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix}$$

נגזור :

$$y_p{}' = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

נחשב :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-c)x+(b-d) \\ (a+3c)x+(b+3d) \end{pmatrix}$$

נציב במשוואה, ונקבל:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-c+1)x+(b-d) \\ (a+3c)x+(b+3d+1) \end{pmatrix}$$

לכן:

$$(1): \quad a-c+1 = 0$$

$$(2): \quad a+3c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-4c+1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c = -\frac{3}{4}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

לכן:

$$(3): \quad -\frac{3}{4} = b-d$$

$$(4): \quad -\frac{3}{4} = b+3d$$

$$\Downarrow$$

$$-4d = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d = 0$$

$$b = -\frac{3}{4}$$

לכן:

$$y_p = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x \end{pmatrix}$$

■

משוואות לינאריות מסדר 2

בהינתן משוואה לינארית הומוגנית מסדר 2, האם ניתן למצוא פתרון <u>אחד</u>?

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$$

תזכורת

$f(x)$ נקראת אנליטית בסביבה של $x_0 \Leftrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ בסביבה פתוחה של x_0. בנוסף, אם f אנליטית:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

משפט

למשוואה לינארית עם מקדמים אנליטיים בצורה נורמלית, הפתרונות הם גם כן אנליטיים.

הערה

בגדול המטרה היא "לנחש" את צורת הפתרון כטור חזקות ולחשב את המקדמים.

הערה

<u>תנאי התחלה</u> נותנים לנו את האיברים <u>הראשונים</u> בטור.

דוגמה

$$y'' + y = 0$$

נציב : $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Longrightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\big) x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} a_{2n} & = & \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \\ a_{2n+1} & = & \dfrac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} \end{matrix}, \begin{matrix} a_0 & = & y(0) \\ a_1 & = & y'(0) \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = y(0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + y'(0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = y(0) \cdot \cos x + y'(0) \cdot \sin x}$$

דוגמה

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \Leftrightarrow xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1)(n+2) a_{n+2} + n a_n + 2a_n\big) x^n$$

$$\Longrightarrow (n+1)(n+2) a_{n+2} = -(n+2) a_n$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{2n} = 0 \ \ (\text{בגלל תנאי ההתחלה})$$

$$\Longrightarrow a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n)!!} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)} = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$$

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2^n} = xe^{-\frac{x^2}{2}}}$$

משוואות לינאריות עם מקדמים אנליטיים (מסדר שני)

תזכורת

משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים אנליטיים מסדר שני היא משוואה מהצורה:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = 0$$

כאשר p,q אנליטיים בסביבה של x_0.

עפ"י משפט, הפתרונות הם גם כן אנליטיים, לכן ניתן להציב:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ולחשב את המקדמים a_n ע"י רקורסיה.

a_0,a_1 נקבעים ע"י תנאי ההתחלה:

$$y(x_0) = a_0$$

$$y'(x_0) = a_1$$

■

דוגמה

$$\boxed{y''+e^x y = 0}$$

המקדמים $0,e^x$ אנליטיים עם רדיוס התכנסות ∞.

מתקיים:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נציב:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

לכן:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

מתקיים:

$$e^x y = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{(n-j)!}$$

נציב במשוואה:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{(n-j)!}\right]\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n$$

נשווה מקדמים של x^n, ונקבל:

$$a_{n+1} = -\frac{\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{(n-j)!}}{(n+1)(n+2)}$$

נוסחת הרקורסיה שמתקבלת די מסובכת, אך בכל זאת ניתן לחשב את המקדמים על לדיוק הרצוי, בהינתן מחשב חזק מספיק.

■

משואת לג'נדר

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+cy = 0 \quad , \quad c\in\mathbb{R}}$$

המקרה המעניין ביותר הוא כאשר $c=k(k+1)$ עבור $k\in\mathbb{Z}$.

המקדמים $\frac{c}{1-x^2},\frac{2x}{1-x^2}-$ אנליטיים עם רדיוס התכנסות 1.

לכן, הפתרונות יהיו אנליטיים בסביבה של 0, אך לא מובטחים פתרונות אנליטיים מעבר לרדיוס 1.

נציב:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

לכן :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

מתקיים :

$$-2xy' = \sum_{n=0}^{\infty} -2n a_n x^n$$

$$(1 - x^2)y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\overbrace{(n+1)(n+2)a_{n+2}}^{y''} - \overbrace{(n-1)n a_n}^{-x^2 y''} \right] \cdot x^n$$

נציב במשוואה, ונשווה את המקדמים של x^n :

$$\begin{array}{llcl}
\boldsymbol{x^0} & 2a_2 + ca_0 & = & 0 \\
 & a_2 & = & -\frac{c}{2} a_0 \\
\boldsymbol{x^1} & 6a_3 - 2a_1 + ca_1 & = & 0 \\
 & a_3 & = & \frac{(2-c)a_1}{6} \\
\forall \boldsymbol{2 \leq n} : \boldsymbol{x^n} & (n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + ca_n & = & 0 \\
 & (n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n+1)a_n + ca_n & = & 0 \\
 & a_{n+2} & = & \frac{(n(n+1) - c)}{(n+1)(n+2)} a_n
\end{array}$$

כאשר $c = k(k+1)$, <u>קיים</u> פתרון שהוא פולינום מדרגה k.

■

משוואות לינאריות עם מקדמים "כמעט" אנליטיים (מסדר שני)

משוואת אוילר

$$\boxed{ax^2y''+bxy'+cy \quad = \quad 0 \quad , \quad a,b,c\in\mathbb{R}}$$

סביר לחפש פתרון מהצורה:

$$y \quad = \quad x^{\alpha} \quad , \quad 0\neq\alpha\in\mathbb{R}$$

נציב:

$$y \quad = \quad x^{\alpha}$$

לכן:

$$\begin{aligned} y' &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha}+b\alpha x^{\alpha}+cx^{\alpha} \quad = \quad 0$$

לכן:

$$a(\alpha^2-\alpha)+b\alpha+c \quad = \quad 0$$

משוואה זו נקראת **משוואת האינדקס**.

כעת, קיימים שלושה מקרים אפשריים:

1. **שני שורשים ממשיים שונים**:
   הפתרון הכללי:

$$y \quad = \quad c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}$$

2. **שורש ממשי אחד כפול**:
   הפתרון הכללי:

$$y \quad = \quad c_1x^{\alpha}+c_2x^{\alpha}\log x$$

3. **שני שורשים מרוכבים $\alpha=\beta\pm\omega i$**:
   הפתרון הכללי:

$$y \quad = \quad x^{\beta}(c_1\cos(\omega\log x)+c_2\sin(\omega\log x))$$

הערה

ההצבה:

$$z = \log x$$

$$\Updownarrow$$

$$x = e^z$$

ממירה את משוואת אוילר למשוואה עם מקדמים קבועים:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dz} &= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = xy' \\
\frac{d^2y}{d^2z} &= \frac{d(xy')}{dz} = (xy')'\cdot x \\
&= xy' + x^2y'' \\
&\vdots \\
\frac{d^ny}{d^nz} &= c_1xy' + c_2x^2y'' + \cdots + c_nx^ny^{(n)}
\end{aligned}$$

■

הגדרה

עבור משוואה:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

אם p, q אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה אורדינרית**.

אם p, q אינם אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה סינגולרית**.

אם x_0 נקודה סינגולרית ו - $(x-x_0)p(x), (x-x_0)^2q(x)$ אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה סינגולרית רגולרית**.

אם x_0 נקודה סינגולרית ו - $(x-x_0)p(x), (x-x_0)^2q(x)$ אינם אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה סינגולרית אי רגולרית**.

■

דוגמה

- עבור משוואת אוילר, 0 היא נקודה סינגולרית רגולרית.
- עבור המשוואה:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x(x-1)^3}y \quad = \quad 0$$

כל נקודה חוץ מ - 0,1 היא נודה אורדינרית.

הנקודה 0 היא נקודה סינגולרית רגולרית.

הנקודה 1 היא נקודה סינגולרית אי רגולרית.

■

משפט (פרוביניוס)

בסביבה של נקודה סינגולרית רגולרית x_0, קיים פתרון (אחד לפחות) מהצורה:

$$\begin{aligned} y \quad &= \quad x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \end{aligned}$$

■

משוואות ליניאריות עם מקדמים "כמעט אנליטיים (מסדר שני)

דוגמה

$$\boxed{9x^2y'' + (x+2)y \quad = \quad 0}$$

המשוואה בצורה נורמלית:

$$y'' + \frac{x+2}{9x^2}y \quad = \quad 0$$

נבדוק את הנקודה 0.

המקדמים הם:

$$p(x) \quad = \quad 0$$

$$q(x) \quad = \quad \frac{x+2}{9x^2}$$

$p(x)$ אנליטי ו - $x^2q(x)$ אנליטי.

לכן, 0 נקודה סינגולרית רגולרית, ועפ"י משפט פרובניוס, קיים פתרון מהצורה:

$$y \quad = \quad x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

כאשר:

$$a_0 \quad \neq \quad 0$$

לכן:

$$y' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2}$$

לכן:

$$9x^2y'' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} 9(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha}$$

נציב במשוואה:

$$[9\alpha(\alpha-1)+2]a_0x^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}[9(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n + a_{n-1} + 2a_n] \cdot x^{n+\alpha} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^{n+\alpha}$$

המשוואה:

$$9\alpha(\alpha-1)+2 \quad = \quad 0$$

נקראת משוואת האינדקס.

<u>שלב א'</u>: משוואת האינדקס הנובעת מהדרגה הנמוכה ביותר של x שמובילה במשוואה, יחד עם ההנחה $a_0 \neq 0$, מביאה למשוואה אלגברית ריבועית עבור α.

<u>שלב ב'</u>: הצבת כל ערכי α וחישוב הרקורסיה.

כאן:

$$9\alpha^2 - 9\alpha + 2 \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{1,2} \quad = \quad \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18}$$

$$\alpha_{1,2} \quad = \quad \frac{2}{3}, \ \frac{1}{3}$$

<u>עבור $\alpha = \frac{1}{3}$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$\left[9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)+2\right]a_n \quad = \quad -a_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \quad = \quad -\frac{a_{n-1}}{(3n+1)(3n-2)+2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{9n^2-3n}$$

<u>עבור $\alpha=\frac{2}{3}$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$\left[9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)+2\right]a_n = -a_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(3n+2)(3n-1)+2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{9n^2+3n}$$

■

דוגמה

$$\boxed{4xy''+2y'+y = 0}$$

0 נקודה סינגולרית רגולרית.

נציב:

$$y = x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}$$

לכן:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2}$$

לכן:

$$2y' = \sum_{n=0}^{\infty}2(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$4xy'' = \sum_{n=0}^{\infty}4(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-1}$$

נציב במשוואה:

$$[2\alpha+4\alpha(\alpha-1)]a_0x^{\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+1+\alpha)(n+1+\alpha-1)a_{n+1}+2(n+1+\alpha)a_{n+1}+a_n]\cdot x^{n+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^{n+\alpha}$$

משוואת האינדקס:

$$4\alpha^2-2\alpha = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{1,2} = 0\,,\ \frac{1}{2}$$

<u>עבור $\alpha=0$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$[4(n+1)n+2(n+1)]a_{n+1}+a_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[4n^2+6n+2]a_{n+1}+a_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(n+1)(4n+2)a_{n+1}+a_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)(4n+2)}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

$$\Downarrow$$

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$y = a_0 \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

<u>עבור $\alpha = \frac{1}{2}$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$\left[4\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]a_{n+1} + a_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)(4n+4)\right]a_{n+1} + a_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^n a_0}{(2(n+1)+1)!}$$

$$\Downarrow$$

$$y \quad = \quad a_0 \cdot x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(2n+1)!}$$

$$\Downarrow$$

$$y \quad = \quad a_0 \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$y \quad = \quad c_1 \cos \sqrt{x} + c_2 \sin \sqrt{x}$$

$$\blacksquare$$

משוואת בסל

$$\boxed{x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y \quad = \quad 0 \quad , \quad \nu \in \mathbb{R}}$$

נכתב על ידי נועם יערי

תזכורת

משוואת בסל:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y$$

פתרונות המשוואה הם פונקציות בסל J_ν

בנוסף, פתרונות המשוואה:

$$y'' + y = 0$$

הם:

$$y(x) = A\sin x + B\cos x$$

ופתרונות המשוואה:

$$y'' + my = 0$$

הם:

$$y(x) = A\sin mx + B\cos mx$$

הערה

האופרטור $D^2: y \to y''$ מודד הפרש בין y בנקודה לבין ממוצע של y בסביבת הנקודה.

$$\begin{aligned} y' &\approx \frac{1}{h}[y(x+h) - y(x)] \\ y'' &\approx \frac{1}{2h^2}\left[[y(x+h) - y(x)] - [y(x) - y(x-h)]\right] \\ &= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{y(x+h) + y(x-h)}{2} - y(x)\right] \end{aligned}$$

משוואת המיתר

$$\begin{cases} y'' + m^2y = 0 \\ y(0) = 0, y(L) = 0 \end{cases}$$

$$m \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$$

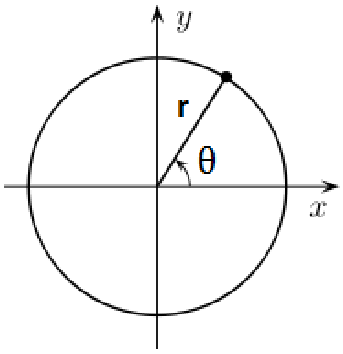
$$\Delta y + m^2y = 0$$

על השפה:

$$y \equiv 0$$

הערה

נניח שרוצים לפתור את המשוואה $\Delta y + m^2y = 0$ בגיאומטריה פשוטה יחסית של דיסק $y\,|_s = u(\theta)$ (Δ הוא הלפלסיאן, כלומר הכללה של נגזרת שנייה).



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

בגלל הסימטריות, נחפש פתרונות מהצורה:

$$y(r,\theta) = R(r)\cdot T(\theta)$$
$$\Longrightarrow \Delta = \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} + m^2 y = 0$$

לכן הצבת הצורה המיוחדת

$$y = R(r)\cdot T(\theta)$$

נותן את המשוואה:

$$0 = R''(r)T(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)T(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta) + m^2R(r)T(\theta)$$
$$0 = r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} + r^2m^2$$

(הפרדת משתנים)

$$\Longrightarrow \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = C \Longrightarrow C = -n^2$$
$$T(\theta) = A\sin(n\theta) + B\cos(n\theta)$$

כאשר $u(\theta) \equiv 1$ קבוע, גל סימטרי רדיאלי, נקבל בהכרח $n = 0$.

$$0 = r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + (r^2m^2 - n^2)$$

פתרונות למשוואה יהיו:

$$R_m(r) = R(mr)$$

כאשר $R(r)$ פותר את המשוואה:

$$0 = r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2 - n^2)R(r)$$

זוהי משוואת בסל ב $r -$.

מסקנה: J_0 הוא "בן-דוד" של $\cos x$ במישור. J_n נובע מפתרונות עם שינוי בכיוון θ.

נכתב על ידי נועם יערי

משוואות בסל

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$

פתרונות המשוואה הם פונקציות בסל J_ν

אנחנו נפתור בעזרת שיטת פרוביניוס בסביבה של 0 (0 היא נקודה סינגולרית רגולרית).

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} & \Longrightarrow (x^2-\nu^2)y(x) = -\nu^2 a_0 x^\alpha - \nu^2 a_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}-\nu^2 a_n)x^{n+\alpha} \\ xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha} \\ x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha} \end{aligned}$$

משוואת האינדקס נובעת מהמקדם של x^α:

$(a_0 \neq 0)$

$$\begin{aligned} &\alpha(\alpha-1)a_0 + \alpha a_0 - \nu^2 a_0 = 0 \\ &\alpha^2 - \nu^2 = 0 \\ &\alpha = \pm\nu \end{aligned}$$

<u>$\alpha = \nu$:</u>

עבור $x^{\alpha+1}$ נקבל:

$$\begin{aligned} [(1+\alpha)\alpha + (1+\alpha) - \nu^2]a_1 &= 0 \\ \underbrace{[(1+\alpha)^2-\nu^2]a_1}_{\substack{\text{לא יכול להתאפס} \\ \text{בגלל ש-}\alpha^2=\nu^2 \\ \alpha\geq 0}} &= 0 \end{aligned}$$

עכשיו לרקורסיה הכללית $(n \geq 2, x^{n+\alpha})$:

$$\begin{aligned} (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n + (n+\alpha)a_n + a_{n-2} - \nu^2 a_n &= 0 \\ [(n+\alpha)^2-\nu^2]a_n &= -a_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-2}}{(n+\nu)^2-\nu^2} \\ &= -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n}^{+} &= \frac{(-1)^n a_0}{2\cdot(2+2\nu)\cdot 4\cdot(4+2\nu)\cdots} \\ &= \boxed{\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\cdot n!\cdot(1+\nu)\cdots(n+\nu)}} \end{aligned}$$

<u>$\alpha=-\nu$</u>

(כמו בפתרון הראשון, רק $\nu-$ במקום ν)

$$\boxed{a_{2n}^{-} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\cdot n!\cdot(-\nu+1)\cdots(-\nu+n)}}$$

<u>האם הפתרונות האלו בלתי תלויים לינארית?</u>

נשים לב, כאשר $\nu\notin\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ההפרש בין ν לבין $\nu-$ – אינו שלם ושני הפתרונות בלתי תלויים לינארית.

נרצה לדעת גם האם הפתרונות בלתי תלויים לינארית כאשר:

- $\nu\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ – העובדה שהטורים יושבים רק במקדמים זוגיים אומר שאלו פתרונות בת״ל.
- $\nu\in\mathbb{Z}$ – שני הפתרונות מתלכדים J_n.

(איחוד של הקבוצות האלו הוא $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$)

דוגמה

$$\nu=\frac{1}{2}$$

נקבל:

$$a_{2n}^{+}=\frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!},\qquad a_{2n}^{-}=\frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} &= \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x \\ y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n)!} &= \frac{1}{\sqrt{x}}\cos x \end{aligned}$$

וסך הכל נקבל שהפתרון הכללי הוא:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(A\sin x+B\cos x)$$

הערה

לגבי $\nu \in \mathbb{Z}$ - נצטרך פתרון נוסף:

- דרך "טובה" – הורדת סדר בעזרת J_n.
- דרך "מעניינת" – הפונקציות J_ν רציפות וגזירות ביחס ל ν –. עבור $n \approx \nu$, הפתרון הכללי למשוואת בסל הוא: $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ ואנחנו יודעים ש – $J_{-n} = (-1)^n J_n$.
אז ניקח:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

$\lim\limits_{\nu\to n\in\mathbb{Z}} Y_\nu$ – פתרון למשוואה שאינו תלוי לינארית ב – J_n

Y_n נקרא "פונקציית בסל מהסוג השני" או "פונקציית נוימן".

מקבעים את x ומחשבים לפי לופיטל:

$$\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \underset{L'hopital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \frac{-J_\nu(x)\cdot\pi\sin\pi\nu + \frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\cdot\cos\pi\nu - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)}{\pi\cos\pi\nu} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\left((-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right)_{\nu=n}$$

נחזור למשוואת בסל המקורית:

$$x^2J_\nu'' + xJ_\nu' + (x^2-\nu^2)J_\nu = 0$$

נגזור את המשוואה לפי ν ונקבל:

$$x^2\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu'' + x\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu' + (x^2-\nu^2)\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu - 2\nu J_\nu = 0$$

ולכן הצירוף הלינארי שלנו פותר את המשוואה המקורית עד כדי:

$$2\nu(J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}) \to 0$$

<u>מסקנה:</u> Y_n פותר את המשוואה ובת"ל עם J_n.

משוואת בסל

תזכורת

משוואה מהצורה:

$$\boxed{x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y \quad = \quad 0 \quad , \quad \nu\in\mathbb{R}}$$

כאשר $\nu\notin\mathbb{Z}$, קיימים שני פתרונות בלתי תלויים לינארית בצורת טור פרובניוס.

- כאשר $\nu\notin\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ההפרש בין שני האינדקסים אינו שלם.
- כאשר $\nu\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, זוהי תכונה מיוחדת של משוואת בסל - המקדמים הזוגיים והאי זוגיים נפרדים, וכל אחד נותן פתרון אחר.

הגדרנו את $\mathcal{J}_n$ עבור $n\in\mathbb{Z}$ ואת $\mathcal{Y}_n$, המשלים את הפתרונות למשוואה, אך אינו רציף ב - 0.

■

פונקציית גמא

הגדרה

$$\boxed{\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt}$$

תכונות

- מתקיים:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &= \left[-t^{x-1}e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (x-1)t^{x-2}e^{-t}\,dt \\ &= (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt \\ &= (x-1)\cdot\Gamma(x-1)\end{aligned}$$

לכן:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

- מתקיים:

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\,dt \\ &= 1\end{aligned}$$

- מתקיים:

$$\Gamma(-n) = \infty$$

שכן:

$$0\cdot\Gamma(0) = \Gamma(1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(0) = \infty$$

$$-1\cdot\Gamma(-1) = \Gamma(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(-1) = \infty$$

נקבל:

$$\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}: \quad \frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$$

- למשל:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt\\ &= \left\{u:=\sqrt{t}\implies t=u^2\right\}\\ &= \int_0^\infty e^{-u^2}\,dt\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

$$\blacksquare$$

הערה

לכל $\nu\in\mathbb{R}$, הגדרנו:

$$\tilde{\mathcal{J}}_\nu(x) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{2^{2j}\cdot j!\cdot(\nu+1)\cdots(\nu+j)}\cdot x^{2j+\nu}$$

לכן:

$$\tilde{\mathcal{J}}_\nu(x) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{2^{2j}\cdot j!\cdot(\nu+1)\cdots(\nu+j)}\cdot x^{2j+\nu}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}_\nu(x) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\cdot\Gamma(\nu+1)}{2^{2j}\cdot j!\cdot\Gamma(\nu+j+1)}\cdot x^{2j+\nu}\\ &= \Gamma(\nu+1)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^{2j}\cdot j!\cdot\Gamma(\nu+j+1)}\cdot x^{2j+\nu}\end{aligned}$$

ונקבל את הנרמול המקובל:

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\cdot\Gamma(\nu+j+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}$$

לכן, לכל $n\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{J}_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\cdot(n+j)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}$$

עבור $n<0$, המקדמים עד $j=|n|-1$, מתאפסים.

לכן:

$$\mathcal{J}_{-n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\cdot(j-|n|)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-|n|}$$

לכן, לכל $n\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{J}_{-n}(x) = (-1)^n\cdot\mathcal{J}_n(x)$$

■

פונקציה יוצרת

הגדרה

$$\boxed{G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot t^n}$$

למה

$$G(x,t) = e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

הוכחה

$$e^{\frac{x}{2}\cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k t^k}{2^k k!}$$

$$e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell x^\ell}{2^\ell t^\ell \ell!}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k k!}\cdot t^k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell x^\ell}{2^\ell \ell!}\cdot\frac{1}{t^\ell}\right) \\
&\overset{\substack{n:=k-\ell \\ \ell+k=n+2\ell}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell x^\ell x^k}{2^{k+\ell}k!\,\ell!}\cdot t^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(\ell+n)!\,\ell!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\ell}\cdot t^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot t^n
\end{aligned}$$

■

הערה

$$e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot t^n$$

נגזור לפי t, ונקבל:

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\cdot \mathcal{J}_n(x)\cdot t^{n-1}$$

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot t^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)\cdot \mathcal{J}_{n+1}(x)\cdot t^{n}$$

$$\frac{x}{2}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{J}_n(x)+\mathcal{J}_{n+2}(x)\right)\cdot t^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)\cdot \mathcal{J}_{n+1}(x)\cdot t^{n}$$

לכן:

$$\mathcal{J}_n(x)+\mathcal{J}_{n+2}(x) = \frac{2(n+1)}{x}\cdot \mathcal{J}_{n+1}(x)$$

נגזור לפי x, ונקבל:

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n'(x)\cdot t^{n}$$

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot t^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n'(x)\cdot t^{n}$$

$$\frac{1}{2}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{J}_{n-1}(x)-\mathcal{J}_{n+1}(x)\right)\cdot t^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n'(x)\cdot t^{n}$$

לכן:

$$\mathcal{J}_{n-1}(x)-\mathcal{J}_{n+1}(x) = 2\cdot \mathcal{J}_n'(x)$$

בפרט, עבור $n=0$:

$$-\mathcal{J}_1(x) = \mathcal{J}_0'(x)$$

■

הצגה אינטגרלית

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\cos\left(n\vartheta - x\sin(\vartheta)\right)\,d\vartheta$$

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos\big(n\vartheta - x\sin(\vartheta)\big)\ d\vartheta$$

הוכחה

$$e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot t^n$$

נציב $t := e^{i\vartheta}$, ונקבל:

$$e^{\frac{x}{2}\cdot\left(e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot e^{in\vartheta}$$

$$e^{ix\sin\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot e^{in\vartheta}$$

$-\sin\vartheta = \sin -\vartheta$, לכן:

$$e^{-ix\sin\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot e^{-in\vartheta}$$

נתבונן בביטוי:

$$\begin{aligned}
\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big) &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{im\vartheta - ix\sin\vartheta} + e^{-im\vartheta + ix\sin\vartheta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-im\vartheta}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot e^{in\vartheta} + e^{im\vartheta}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot e^{-in\vartheta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot\left(e^{-i(m-n)\vartheta} + e^{i(m-n)\vartheta}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot\cos\big((m-n)\vartheta\big)
\end{aligned}$$

לכן:

$$\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot\cos\big((m-n)\vartheta\big)$$

נבצע אינטגרציה:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big)\ d\vartheta \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big((m-n)\vartheta\big)\ \ d\vartheta$$

מתקיים :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big((m-n)\vartheta\big)\ \ d\vartheta \quad = \quad \begin{cases}0\ , & n\neq m\\ 1\ , & n=m\end{cases}$$

לכן :

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big)\ d\vartheta \quad = \quad \mathcal{J}_m(x)$$

■

נכתב על ידי יהונתן רגב

משוואת לג'נדר

תזכורת

משוואה מהצורה:

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+k(k+1) \quad = \quad 0 \quad , \quad k\in\mathbb{Z}}$$

קיים פתרון שהוא פולינום מדרגה k, נסמנו $\mathcal{P}_k$ (הדרגה זוגית עבור $k\in 2\mathbb{Z}$ ואי זוגית עבור $k\in 2\mathbb{Z}+1$).

נוסחת רודריג' $(\boldsymbol{Rodrigues})$

$$\mathcal{P}_k(x) \quad = \quad \frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k]$$

פונקציה יוצרת

$$G(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}_k(x)\cdot t^k$$

הוכחה (נוסחת רודריג')

$$\begin{aligned}(x^2-1)\cdot\frac{d}{dx}[(x^2-1)^k] \quad &= \quad (x^2-1)\cdot k(x^2-1)^{k-1}\cdot 2x \\ &= \quad 2xk(x^2-1)^k\end{aligned}$$

אם נגזור את שני האגפים $(k+1)$ פעמים, נקבל כי $\mathcal{P}_k$ פותר את משוואת לג'נדר (**תרגיל:** בדוק!).

הוכחה (פונקציה יוצרת)

הוכחה בעזרת מניפולציות עם נגזרות חלקיות של $G^2(x,t)$.

הערה

נגזור את הפונקציה היוצרת $G(x,t)$ לפי t ולפי x, ונקבל יחסי רקורסיה בין $\mathcal{P}_{n+2}\mathcal{P}_{n+1},\mathcal{P}_n$ ובין $\mathcal{P}_n',\mathcal{P}_{n+1},\mathcal{P}_{n-1}$.

הערה

$$\mathcal{P}_n(\cos(\vartheta)) \quad = \quad J_0(n\vartheta)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

נכתב על ידי יהונתן רגב

הצגה אינטגרלית

$$\mathcal{P}_n(\cos(\vartheta)) \quad = \quad \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)\cos(\vartheta))^n \ d\vartheta$$

■

נכתב על ידי נועם יערי

התמרות לפלס

עבור פונקציה f שהיא רציפה למקוטעין ובעלת גידול אקספוננציאלי, נגדיר:

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

מוגדר עבור $s>s_0$ מספיק גדול.

הגדרה

f נקראת בעלת גידול אקספוננציאלי אם ורק אם קיים $c>0$, $\alpha>0$ כך שלכל t מתקיים:

$$|f(t)|\le Ce^{\alpha t}$$

הערה

התמרת פורייה:

$$\hat{f}=\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-ist}dt$$

דוגמה

1. $f(t)\equiv 1$

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{s}$$

2. $f(t)=e^{\alpha t}$

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt=\frac{1}{s-\alpha}$$

<u>הערה:</u> באופן כללי, אם $\mathcal{L}[f](s)=F(s)$ אזי $\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha)$

3. $f(t)=\sin wt$

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty \sin wt\cdot e^{-st}dt=\underbrace{-\frac{1}{s}\sin wt\, e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}}_{\to 0}+\frac{w}{s}\int_0^\infty \cos wt\, e^{-st}dt$$

$$=-\frac{w}{s^2}\cos wt\cdot e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}-\frac{w^2}{s^2}\int_0^\infty \sin wt\cdot e^{-st}dt$$

$$\Longrightarrow\left(1+\frac{w^2}{s^2}\right)\mathcal{L}[f](s)=\frac{w}{s^2}\Longrightarrow\mathcal{L}[f]=\frac{\frac{w}{s^2}}{1+\frac{w^2}{s^2}}=\frac{w}{s^2+w^2}$$

נכתב על ידי נועם יערי

4. $f(t) = \cos wt$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty \cos wt \ \cdot e^{-st}dt = \frac{1}{s} - \frac{w}{s}\int_0^\infty \sin wt \cdot e^{-st}dt =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{w^2}{s^2}\mathcal{L}[f](s) \Longrightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{w^2}{s^2}} = \frac{s}{s^2+w^2}$$

עובדה

אם f, g רציפות למקוטעין ובעלות גידול אקספוננציאלי ומתקיים $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$ פרט אולי לנקודה בה אחת מהן לא רציפה.

לא נוכיח זאת בקורס (משתמשים בהתמרה ההופכית ובאנליזה מרוכבת).

התמרת לפלס של נגזרת

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}(e^{-st})dt =$$

$$= f(t)e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty} + s\cdot\mathcal{L}[f](s) = s\cdot\mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

דוגמה

$$y' + y = 0, \qquad y(0) = 1$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים (קל לראות שההתמרה לינארית מלינאריות האינטגרל):

$$sY - 1 + Y = 0 \Longrightarrow Y = \frac{1}{s+1} \Longrightarrow y(t) = e^{-t}$$

תכונות נוספות

.1

$$g(t) = e^{\alpha t}f(t)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}[f](s-\alpha)$$

.2

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}[f''] = s[\mathcal{L}[f'](s)] - f'(0) = s^2 - \mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n\cdot\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - s\cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

.3

$$g(t) = f(\alpha t)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

.4

$$g(t) = t \cdot f(t)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[g](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$$

דוגמה נוספת

$$f(t) = t^n$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$$
$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

(זה כולל גם $n \notin \mathbb{N}$)

נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

$$\underline{y'' - y = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1}$$

במקום לעשות 3 שלבים מתישים, נפעיל התמרת לפלס בשני האגפים ונקבל:

$$[s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)] - Y = \frac{1}{s}$$

$$(s^2-1)Y - 1 = \frac{1}{s}$$

$$(s^2-1)Y = \frac{1}{s} + 1 = \frac{1+s}{s}$$

$$\Longrightarrow Y = \frac{1+s}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$\Longrightarrow Y = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = e^t - 1}$$

דוגמה

$$\underline{y'' - 5y' + 6y = 8e^t, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1}$$

$$[s^2Y - s\cdot y(0) - y'(0)] - 5[sY - y(0)] + 6Y = \frac{8}{s-1}$$

$$Y(s^2 - 5s + 6) - 3s + 16 = \frac{8}{s-1}$$

$$\Longrightarrow Y(s^2 - 5s + 6) = \frac{8}{s-1} + 3s - 16$$

$$Y = \frac{8}{(s-1)(s^2-5s+6)} + \frac{3s-16}{s^2-5s+6}$$

$$= \frac{8}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \frac{3s^2 - 19s + 16}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$$= \frac{4}{s-1} + \frac{2}{s-2} - \frac{3}{(s-3)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = 4e^t + 2e^{2t} - 3e^{3t}}$$

דוגמה

$$\begin{cases} y_1' + y_1 + 2y_2 = e^{2t} \\ y_2' + 2y_1' - y_1 = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

נפעיל לפלס:

$$\begin{cases} s\,Y_1 + Y_1 + 2Y_2 = \dfrac{1}{s-2} \\ s\,Y_2 + 2s\,Y_1 - Y_1 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$Y_2 = \frac{1-2s}{s}Y_1$$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל:

$$(s+1)Y_1 + 2\left(\frac{1-2s}{s}\right)Y_1 = \frac{1}{s-2}$$

$$Y_1\left(\frac{s^2-3s+2}{s}\right) = \frac{1}{s-2}$$

$$Y_1 = \frac{s}{(s-2)(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{s}{(s-2)^2(s-1)}$$

$$= \frac{2}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1}$$

$$Y_2 = \frac{1-2s}{(s-2)^2(s-1)} = -\frac{3}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= 2te^{2t} - e^{2t} + e^t \\ y_2(t) &= -3te^{2t} + e^{2t} - e^t \end{aligned}}$$

דוגמה

חישוב $\mathcal{L}[J_0]$ עבור תנאי התחלה $J_0(0) = 1\,; J_0' = 0$:

שימו לב, J_0 פותר את משוואת בסל:

$$xJ_0'' + J_0' + xJ_0 = 0$$

נפעיל לפלס:

$$\mathcal{L}[xJ_0''] + \mathcal{L}[J_0'] + \mathcal{L}[xJ_0] = 0$$

נסמן: $g := \mathcal{L}[J_0]$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(s^2 g(s) - s) + s \cdot g(s) - g'(s) = 0$$

$$\Rightarrow -s^2 g'(s) - 2sg(s) + 1 + sg(s) - g'(s) = 0$$

$$\Rightarrow -(s^2+1)g'(s) = s \cdot g(s)$$

$$\Rightarrow \frac{g'(s)}{g(s)} = -\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \log g(s) = -\int \frac{s}{s^2+1} ds \underset{du=2sds}{\overset{u=s^2+1}{=}} -\frac{1}{2}\log(s^2+1) + C$$

$$\Rightarrow g(s) = C \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

נותר לחשב את הקבוע.

משפט

אם f רציפה ב – 0 אזי:

$$\lim_{s\to\infty} s \cdot \mathcal{L}[f](s) = f(0)$$

הוכחה

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$s \cdot \mathcal{L}[f](s) = \underbrace{\int_0^\varepsilon s \cdot f(t)e^{-st}dt}_{f(0)\cdot(1-e^{-s\varepsilon})} + \underbrace{\int_\varepsilon^\infty s \cdot f(t)e^{-st}dt}_{\le \sup|f|\cdot\int_\varepsilon^\infty se^{-st}dt \lesssim e^{-s\varepsilon}\to 0}$$

דוגמה

נחזור למציאת הקבוע בדוגמה הקודמת.

$$\lim_{s\to\infty} s \cdot g(s) = C \cdot \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = C$$

– סוף הקורס –