תרגילים נוספים

8 במאי 2017

שאלה 1

ראינו בהרצאה את המשפט הבא:

אם $f(x)\geq 0$ לכל x בקטע $[a,b]$. אם $\int_a^b f(x)dx=0$ אזי $f(x)=0$ כמעט בכל מקום.

שאלה: אם הטענה נשארת נכונה ללא התנאי $f(x)\geq 0$?

תשובה: לא! ניקח למשל $sin(x)$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, האינטגרל של הפנקציה הזו הוא אפס אבל ברור שהפונקציה עצמה אינה אפס.

באופן כללי, אינטגרל של פונקציה אי זוגית בקטע סימטרי ביחס ל-$x=0$ שווה לאפס.

שאלה 2

ראינו גם את המשפט הבא: פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית. האם הטענה נשארת נכונה אם הקטע אינו סגור?

תשובה: לא! ניקח למשל $f(x)=\frac{1}{x}$ ב-$(0,1]$, פונקציה זו היא מונוטונית בקטע אבל לא אינטגרבילית כי היא לא חסומה שם.

שאלה 3

נניח ש-$f(x)$ פונקציה חסומה ואינטגרבילית רימן- דרבו בקטע $[0,4]$. עוד נניח שלכל תת קטע $I\subset[0,4]$ קיימת (לפחות) נקודה אחת $x_0\in I$, כך ש-$f(x_0)\leq 2$. הוכיחו ש: $\int_0^4 f(x)dx\leq 8$.

פתרון:

תהי חלוקה כלשהיא של הקטע $[0,4]$. ניקח סכום רימן של הפונקציה עבור החלוקה, ובכל חלק נבחר נקודה עבורה $f(c_i)\leq 2$.

לכן סכום רימן הינו:

$$\sum|x_i-x_{i-1}|\,f(c_i)\leq 2\sum|x_i-x_{i-1}|=2\cdot(4-0)=8$$

שאלה 3

נכון או לא נכון:

א) $\int_0^1 sin(x^3) \geq \int_0^1 sin(x^2)$

פתרון:

לר נכון. ברור ש־$sin(x^n)$היא פונקציה אינטגרבילית ב־$[0,1]$. בנוסף בקטע הזה sin היא פונקציה מונוטונית עולה. בנוסף $x^3 \leq x^2$ ב־$[0,1]$ ולכן $sin(x^3) \leq sin(x^2)$ ולכן $\int_0^1 sin(x^3)dx \leq \int_0^1 sin(x^2)dx$.

ב) $\int_0^1 sin(x^2)dx \geq 1$

תשובה: לא, מאותה סיבה כמו ב־א'

ג) $\int_0^1 sin(x^3)dx = sin(c^3)$ לכל $c \in [0,1]$

לא, כי למשל עבור $c = 0$ נקבל $sin(0) = 0$ אבל האינטגרל שלנו אינו אפס.

ד) קיים $c \in [0,1]$ כך ש: $\int_o^1 sin(x^3)dx = \int_0^1 sin(x^2)dx$

נכון, ממשפט הערך הממוצע.

שאלה 4

נתונה f רציפה ב־$[a,b]$. ונניח שקיימת חלוקה P של $[a,b]$ שעבורה $\overline{S}(P) = \int_a^b f(x)dx$, ז"א הסכום העליון עבור f שמתאים לחלוקה P שווה לאינטגרל של f.

הוכח ש־f היא פונקציה קבועה.

שאלה 5

הוכיחו אם f ו־g הן שתי פונקציות רציפות על $[0,1]$ ואם לכל $b \in [0,1]$, $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b g(x)dx$ אזי $f(x) = g(x)$ עבור כל $x \in [0,1]$.

ב) האם התוצאה של חלק א' נכונה עבור fו־g מונוטוניות?