נניח $E\in\mathbb{R}^d$ מלבן d ממדי

<u>הגדרה</u>: מדה <u>פנימית</u> של $A\in\mathbb{P}(E)$ מוגדרת:

$$m_*(A) := |E| - m^*(E-A)$$

<u>משפט</u>: $A\in S$ (כלומר: מדידה-לבג) אמ"מ $m_*(A)=m^*(A)$

<u>הוכחה</u> - I כיוון ראשון $\Leftarrow$

$A\in S$ וראינו שהצמצום $m^*|_S$ σ-אדיטיבית.

וכן S σ-אלגברה. (לכן $E-A\in S$)

$\Leftarrow$ $m^*(A)+m^*(E-A)=|E|$

כלומר $m^*(A)=m_*(A)$

II כיוון שני $\Rightarrow$

נניח $m^*(A)=m_*(A)$

ויהי $\varepsilon>0$, לפי הגדרת המידה החיצונית יש מערכות <u>סופיות</u>

(כיוון ש A חסומה) של מלבנים $\{B_i\}_1^m$, $\{C_i\}_1^n$

המכסות את A ו: $E-A$ בהתאמה, כך ש:

$$\left[\sum_{i=1}^m \underset{|B_i|}{\underset{\shortparallel}{m^*(B_i)}} \le m^*(A)+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{וגם:} \quad \sum_{i=1}^n \underset{|C_i|}{\underset{\shortparallel}{m^*(C_i)}} \le m^*(E-A)+\frac{\varepsilon}{2}\right] \quad ⊛$$

נסמן $B:=\bigcup_{i=1}^m B_i$; $Q:=\bigcup_{j=1}^n (B\cap C_j)$

אז:

$Q\supseteq B-A$ וגם $A\subseteq B$ כיסוי

לכן: $B-A = A\Delta B\subseteq Q$

כעת: $E = B\cup\left(\bigcup_{i=1}^n C_i - B\right)$

ולכן, לפי תת-אדיטיביות m^*,

$$(1) \qquad m^*(B)+\sum_{i=1}^n m^*(C_i-B)\ge |E|$$

וגם, לפי ⊛ ותת אדיטיביות m^*:

$$(2) \qquad m^*(B)+\sum_{i=1}^n |C_i| \le m^*(A)+m^*(E-A)+\varepsilon \underset{\text{לפי ההנחה}}{\underset{\uparrow}{=}} |E|+\varepsilon$$

מ: (1) ו (2) נקבל:

$$\sum_{j=1}^n |C_j| - \sum_{i=1}^n m^*(C_i-B)\le\varepsilon$$

בנוסף, לפי החיסוריה של קבוצה אלמנטרית (ודאי מדויק!)

$$m^*(Q) \leq \varepsilon .$$

לסיכום, קיבלנו: (לפי המונוטוניות של m^*):

$$m^*(A \triangle B) \leq m^*(Q) \leq \varepsilon$$

ו-B אלמנטרית לפי ההגדרה. כנדרש.

ראינו בעבר שב-$\mathbb{R}$ כל קבוצה פתוחה ניתנת להצגה כאיחוד מני של קטעים פתוחים זרים. ולכן - מדידה לבג.

טענה: $G \subseteq \mathbb{R}^d$ קב' פתוחה. אזי G מדידה לבג. (ב-$\mathbb{R}^d$)

הוכחה: נראה, כי כל קבוצה פתוחה היא איחוד מני של מלבנים פתוחים:

$G \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה, אזי לכל $x \in G$ קיים מלבן פתוח P_x כך ש: $x \in P_x \subseteq G$. ולכן $G = \bigcup_{x \in G} P_x$

קיבלנו: G היא איחוד של המלבנים הפתוחים: $\mathbb{P} = \{P_x\}_{x \in G}$

כעת, כיון ש-$\mathbb{Q}^d$ צפופה ב-$\mathbb{R}^d$ מתקיים:

לכל $x \in G$, אם $P_x \setminus (\bigcup_{y \neq x} P_y) \neq \emptyset$ (1) $\Leftarrow$ קיים q_x:

$$q_x \in (P_x \setminus (\bigcup_{y \neq x} P_y)) \cap \mathbb{Q}^d .$$

אחרת: $P_x \setminus (\bigcup_{y \neq x} P_y) = \emptyset \Leftarrow G = \bigcup_{x \in G} P_x = \bigcup_{y \neq x} P_y$

ולסיכום, מספיק לקחת לצורך ההצגה של G כאיחוד רק x-ים שעבורם מתקיים (1):

כעת נבחין כמוכן: $\mathbb{P}_0 = \{P_x \mid P_x \in \mathbb{P};\ P_x \setminus (\bigcup_{y \neq x} P_y) \neq \emptyset\}$

כמו שהבנו כאמור, נוכל לבנות פונקציה חח"ע:

$$\rho : \mathbb{P}_0 \to \mathbb{Q}^d$$

ע"י

$$P_x \mapsto q_x$$

ולכן $|\mathbb{P}_0| \leq |\mathbb{Q}^d| = \aleph_0$

כנדרש.

קבוצות בעלות מידה-0.

יהיו $\varphi(t), \psi(t)$ פונקציות רציפות וגזירות ברציפות על $[0,1]$

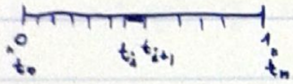
טענה: העקומה הנתונה: $\ell := \{(\varphi(t),\psi(t)) \mid t\in[0,1]\}\subseteq \mathbb{R}^2$ בעלת מידת לבג 0.

הוכחה: קיימים C_φ, C_ψ - קבוע ליפשיץ עבור φ, ψ בהתאמה כנדרש

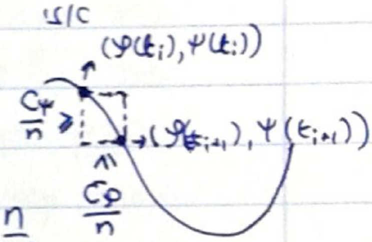
$$\forall t_1,t_2\in[0,1]: |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\le C_\varphi|t_1-t_2|$$
$$|\psi(t_1)-\psi(t_2)|\le C_\psi|t_1-t_2|$$

נסמן $C=C_\varphi\cdot C_\psi$

לכל $n\in\mathbb{N}$ נחלק את הקטע $[0,1]$ ל n קטעים זרים באורך $1/n$ כל אחד:



אזי $m^*\{(\varphi(t),\psi(t)) \mid t_i\le t\le t_{i+1}\}\le \frac{C}{n^2}$



ולכן, לפי תת אדיטיביות m^*:

$$m^*(\ell)\le\sum_{i=0}^{n-1} m^*\{(\varphi(t),\psi(t)) \mid t_i\le t\le t_{i+1}\}\le C\frac{n}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

ולכן $m^*(\ell)=0$. מש"ל.

(*) הערה: גיזו, הקבוצה שהצגת ($\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) אכן יש מידה אין סופית אולם הבניה נהלין ומעת דק׳ שבחו גג קומפקטית, בעצם.

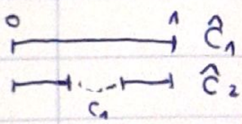
קבוצת קנטור מוכללת.

מהרצאה הבנו קבוצת קנטור בעלת מידה-0.

כעת נראה בניה כללית של קבוצת קנטור מוכללת: $\hat{C}\subset[0,1]$ אשר מידתה $0<\alpha<1$:

יהי $\{c_k\}_k$ סדרת מספרים ממשיים חיוביים כך ש- $0<\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k<1$.

דומה לאופן הבניה של קב׳ קנטור שראינו.



בשלב הראשון נוריד ממרכז הקטע $\hat{C}_1=[0,1]$ קטע באורך c_1

ונקבל 2 קטעים באורך $\frac{1-c_1}{2}$ כל אחד. נגדיר אותם להיות $\hat{C}_2$.

Scanned by CamScanner

בשלב הבא, נוריד מהמרכז כל אחד מהם קטע באורך c_2 ונקרא את $\hat{C}_3$

ונמשיך... בשלב ה n-י נוריד מהמרכז כל אחד מ 2^{n-1} הקטעים

שנוצרו עד כה קטע באורך c_n.

ולבסוף, נגדיר את:

$\hat{C} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \hat{C}_k$ ונקרא לה קנטור המוכללת.

(א) הוכיחו: $\hat{C}$ קומפקטית ולא מכילה נק' מבודדות ("מושלמת")

הוכחה: כיוון שבכל שלב $\hat{C}_k$ הוא איחוד של מס סופי (2^{k-1})

של קבוצות סגורות - הוא סגורה בכל שלב. לכן, $\hat{C}$

סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות.

בנוסף: $\hat{C} \subset [0,1]$ ולכן, חסומה.

לסיכום $\hat{C}$ סגורה וחסומה ב $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\hat{C}$ קומפקטית.

נותר להראות שכל הנקודות ב $\hat{C}$ הן נק' הצטברות.

ניקח $x \in \hat{C}$, אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ $x \in \hat{C}_k$, ולמעשה x שייכת

בדיוק לאחד מ 2^{k-1} הקטעים הסגורים הזרים המרכיבים את $\hat{C}_k$.

נמספר קטעים אלו ע"י A_k^m כאשר $1 \le m \le 2^{k-1}$

כך, נבנה סדרה: $\{x_m\} \subset \hat{C}$ שמתכנסת ל x: לכל $k \in \mathbb{N}$, הקטע A_k^m

המכיל את x הוא בעצמו קבוצה שנמצאת ב $\hat{C}$ (לפי הבנייה)

[כמו שני הקצוות: $A_k^m = [a_k, b_k] \subset \hat{C}_k$,

ולכן נגדיר $x_k := a_k \in \hat{C}$

כעת:

$$|x - x_k| \le b_k - a_k = \frac{1 - \sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} c_i}{2^{k-1}} \xrightarrow[(k\to\infty)]{} 0$$

ולכן $\{x_m\}$ מתכנסת ל x. ומכיוון שלקחנו $x \in \hat{C}$ שרירותי,

נקבל שאין ב $\hat{C}$ נק' מבודדות.

(ב) הוכיחו: $\hat{C}$ "דלילה" כלומר: הפנים של $\hat{C}$ ריק.

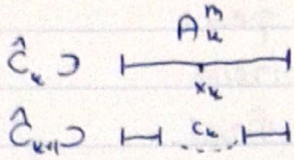
הוכחה: נראה כי $\hat{C}$ לא מכילה אף קטע פתוח באופן הבא:

לכל $x \in \hat{C}$, נבנה סדרה ב $\hat{C}^c$ אשר מתכנסת ל x.

יהי $x \in \hat{C}$, נבנה סדרה $\{x_m\} \subset \hat{C}^c$: לכל $k \in \mathbb{N}$, $x \in A_k^m$

(בדיוק כמו בסעיף הקודם). נגדיר את x_k להיות מרכז הקטע A_k^m

אותו מורידים בשלב ה-k-י. לכן ברור כי $x_k \in \hat{C}^c$.



וכן:

$$|x-x_k| \le \frac{|A_k^m|}{2} = \frac{1-\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1}c_i}{2^k} \xrightarrow[(k\to\infty)]{} 0$$

ולכן: הפנים של $\hat{C}$ ריק.

ג) הוכיחו: $m^*(\hat{C}) = 1-\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}c_k > 0$

הוכחה: בשלב ה-k-י אנו מורידים 2^{k-1} קטעים באורך c_k כל אחד

מכאן ש-

$$m^*(\hat{C}) = \lim_{k\to\infty} m^*(\hat{C}_k) = \lim_{k\to\infty}\left(m^*([0,1]) - \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}c_i\right) =$$

לפי המשפט על סדרה יורדת שעסקנו בהמשך.

לפי תכונת החסוריות שראינו בשיעור.

$$= 1-\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}c_i = 1-\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}c_i > 0$$

לפי ההנחה על $\{c_k\}$

(*) שימו לב, לפי סעיף ב, ניתן לבחור $c_k = \frac{1-\alpha}{3^k}$ כאשר $\alpha\in(0,1)$

ואז נקבל $m^*(\hat{C}) = \alpha$. [לחישוב הקודם.

תכונת החיסוריות.

ראינו בפעם הקודמת, עבור קבוצות בעלות מידה סופית: אם $E \subseteq F$ מדידות.

אזי $m(F-E) = m(F) - m(E)$

בהרצאה, הרחבנו את מושג המידה וראינו שיש גם קבוצות בעלות מידה אינסופית.

לכן, כאן, בתכונת החיסוריות, נדרוש בנוסף ש- $m(E)<\infty$

הסבר לדרישה הנוספת נראה בדוגמא הבאה:

מההרצאה הראשונה הגדרנו את מידת הספירה על $\mathbb{N}$: $E\in P(\mathbb{N})$

$$\mu(E) := \begin{cases} |E| & \text{סופית } E \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

יהי $n\in\mathbb{N}$.

ניקח: $F := \mathbb{N}$, $E := \{k \mid k\ge n\}$

אזי $\mu(F-E) = n-1$

אולם $\mu(F) = \infty$, $\mu(E) = \infty$

ולאו מתקיימת התכונה! לכן נדרוש $\mu(E)<\infty$.

Scanned by CamScanner

הוכחנו בשיעור הקודם את המשפט על סדרה עולה של קבוצות. כעת נוכיח את

ה: משפט על סדרה יורדת (הוכחה בהרצאה!)

יהי $(X, \mathbb{A}, \mu)$ מרחב מידה ($\mathbb{A}$ σ אלגברה)

ו- $\{E_i\}_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{A}$ סדרה יורדת של קב' מ $\mathbb{A}$. $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$

אזי: קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$

ואם $\mu(E_i)<\infty$ לפחות עבור $i\in\mathbb{N}$ אזי: $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$

<u>תרגיל:</u> יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה, וכן ν מידה <u>סופית</u> על $\mathbb{A}$ ($\nu:\mathbb{A}\to[0,\infty)$), כך שאם $E\in\mathbb{A}$

אם $\mu(E)=0$ אזי $\nu(E)=0$

הוכיחו: לכל $0<\epsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש:

$$\forall E\in\mathbb{A}: \quad \mu(E)<\delta \Rightarrow \nu(E)<\epsilon$$

<u>הוכחה:</u> אחרת, קיים $0<\epsilon_0$ כך שלכל $0<\delta$ קיימת $E\in\mathbb{A}$ כך ש $\mu(E)<\delta$ וגם $\nu(E)\geq\epsilon_0$.

בפרט, לכל n טבעי קיימת $\mathbb{A}\ni E_n$ כך ש $\mu(E_n)<\frac{1}{2^n}$

וגם $\nu(E)\geq\epsilon_0$ (עבור $\delta=\frac{1}{2^n}$)

נגדיר: $F_n := \bigcup_{n\le k} E_k$ ($\mathbb{A}\ni F_n$ כיון ש $\mathbb{A}$ σ-אלגברה)

$(=\overline{\lim} E_n)$ $\quad F:=\bigcap_{\mathbb{N}} F_n$ ($\mathbb{A}\ni F$ כנ"ל)

אזי $F_n\supseteq F_{n+1}$ סדרה יורדת. נחשב:

$$\mu(F_n)=\mu(\bigcup_{n\le k}E_k) \underset{\text{תת אדטיביות}}{\le} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \le \sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(כזנב של טור מתכנס)

לכן $\mu(F_n)\xrightarrow{(n\to\infty)}0$, כמו כן $\mu(F_n)<\infty$ לכל n, לפי ההגדרה.

$\Leftarrow$ לפי משפט על סדרה יורדת, נקבל:

$$\mu(F)=\mu(\bigcap_n F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=0$$

ולכן גם: $\underline{\nu(F)=0}$. (*)

אולם, ν מידה סופית. לכן: $\nu(F_n)<\infty$

ושנית ע"י שימוש במשפט על סדרה יורדת, (עבור ν) נקבל:

$$(1) \quad \nu(F) = \nu\Big(\bigcap_n F_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n)$$

ולפי המונוטוניות של המידה ν:

$$\varepsilon_0 \overset{\text{מהנחת השלילה}}{\le} \nu(E_n) \overset{\substack{E_n\subseteq F_n \\ \text{מונוטוניות}}}{\le} \nu(F_n)$$

ולכן גם $\nu(F) \ge \varepsilon_0$ (לפי (1))

בסתירה ל $(*)$.