תרגיל מספר 3 מבנים אלגבריים

13 בנובמבר 2014

1. תהא G חבורה. הוכח כי
   (א) $\forall g_1,g_2\in G:\ (g_1g_2)^{-1}=g_2^{-1}g_1^{-1}$
   (ב) אם G חילופית אזי $\forall g_1,g_2\in G:\ (g_1g_2)^{-1}=g_1^{-1}g_2^{-1}$

2. תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1,g_2\in G:(g_1g_2)^2=g_1^2g_2^2$.
   הוכח כי G חבורה חילופית.

3. עבור $\sigma\in S_n$ ומחזור $(i_1,i_2,\dots i_m)\in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא
   $$\sigma\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)\sigma^{-1}=\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)$$

4. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
   כלומר $\sigma=\prod_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.
   אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=(1,2,3,\dots,n)\,,\sigma_2=(1,2)$.
   (א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 3 יכול להיות לעזר)
   (ב) הראה שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$
   (ג) הוכח את הטענה.

5. נזכיר כי A_n היא תת קבוצה של S_n של התמורות הזוגיות ומהווה חבורה ביחס להרכבה.
   מצא את המרכז שלה $C(A_n)$

6. שאלת בונוס (לא חובה) נגדיר

$$G=\left\{\left(a_{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}} \mid \forall i\,\#\left\{a_{i,j}\neq 0\right\}_{j\in\mathbb{N}}<\infty\ \wedge\forall j\,\#\left\{a_{i,j}\neq 0\right\}_{i\in\mathbb{N}}<\infty\right\}$$

כלומר אוסף המטריצות מגודל אינסופי $\begin{pmatrix} * & * & \cdots \\ & * & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$ המקיימות שבכל שורה (ובכל טור) יש מספר סופי של איברים ששונים מאפס.

(א) הוכח כי G עם כפל מטריצות היא מונואיד (לא לשכוח להוכיח סגירות).

(ב) עבור $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}\in G$ הוכח כי אין לה הופכי משמאל ומצא את כל ההופכים מימין שלה.