בדידה למורים- תרגיל בית 7

1.בדקו האם הפונקציות הבאות חח"ע? על?

א. $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, המוגדרת כך: $f((a,b))=\dfrac{a}{b}$. (תזכורת: $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ הוא הקבוצה של כל הזוגות (a,b) כך ש $a\in\mathbb{Z}$ ו $b\in\mathbb{N}$.למשל, $f(1,2)=\dfrac{1}{2}$)

ב. $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת כך: $f(a.b)=a-b$.

ג. עבור שתי קבוצות A,B נגדיר $f:A\times B\to B\times A$ ע"י $f((a,b))=(b,a)$.

פתרון:

א. הפונקציה על: ידוע שכל איבר ב$\mathbb{Q}$ הוא שבר, כמו מהצורה $\dfrac{a}{b}$ כאשר $a\in\mathbb{Z}$ ו$n\in\mathbb{N}$, ולכן המקור של $\dfrac{a}{b}$ יהיה (a,b).

הפונקציה לא חח"ע: למשל $f((1,2))=\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=f((2,4))$.

ב. הפונקציה על: המקור של 0 הוא למשל $(1,1)$. כי $f(1,1)=1-1=0$.

יהי $x\in\mathbb{Z}$ מספר חיובי. אז המקור שלו הוא למשל $(x+1,1)$.

יהי $x\in\mathbb{Z}$ מספר שלילי. נניח $x=-y$ כאשר $y\in\mathbb{N}$. אז המקור שלו הוא למשל $(1,1+y)$.

הפונקציה לא חח"ע: כי $f(1,1)=0=f(2,2)$.

ג. הפונקציה חח"ע ועל.

על: יהי $(b,a)\in B\times A$, אז המקור שלו הוא (a,b).

חח"ע: יהיו $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ זוגות שונים. כלומר, יש רכיב שבו הם שונים. אם $a_1\neq a_2$ אז $(b_1,a_1)\neq(b_2,a_2)$ ברכיב השני, ולכן הם זוגות שונים.

אם $b_1\neq b_2$ אז $(b_1,a_1)\neq(b_2,a_2)$ ברכיב הראשון, ולכן הם זוגות שונים.

לסיכום, קיבלנו שאם $(a_1,b_1)\neq(a_2,b_2)$ אז $f((a_1,b_1))\neq f((a_2,b_2))$

2. יהיו A,B,C,D קבוצות כך שיש $f:A\to B$ פונקציה חח"ע ועל, ו$g:C\to D$ פונקציה חח"ע ועל. נגדיר $h:A\times C\to B\times D$ ע"י: $h((a,c))=(f(a),g(c))$. הוכיחו שh חח"ע ועל.

פתרון:

נוכיח שh על:

יהי $(b,d)\in B\times D$. f על ולכן יש $a\in A$ כך ש $f(a)=b$. g על ולכן יש $c\in C$ כך ש $g(c)=d$.

אז: $h(a,c)=(f(a),g(c))=(b,d)$. כלומר, (a,c) הוא מקור של (b,d).

נוכיח שh חח"ע:

יהיו $(a_1,c_1),(a_2,c_2)\in A\times C$ כך ש $h((a_1,c_1))=h((a_2,c_2))$. צריך להוכיח ש $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$.

ובכן,

$$h((a_1,c_1)) = h((a_2,c_2))$$

$$\Downarrow$$

$$(f(a_1),g(c_1)) = (f(a_2),g(c_2))$$

$$\Downarrow$$

$$f(a_1) = f(a_2) \wedge g(c_1) = g(c_2)$$

בגלל שf וg פונקציות חח"ע, זה גורר ש $a_1 = a_2 \wedge c_1 = c_2$.
כלומר, $(a_1,c_1) = (a_2,c_2)$.

3. יהי $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ ו$C = \{5,6,7\}$, ותהי הפונקציה $f : B \to C$ המוגדרת: $f(3) = 5, f(4) = 6$.
נסמן בB^A את אוסף הפונקציות מA לB, ובC^A את אוסף הפונקציות מA לC. נגדיר פונקציה $h : B^A \to C^A$ באופן הבא: $h(g) = f \circ g$.
למשל: תהי הפונקציה $g : A \to B$ המוגדרת $g(1) = 3, g(2) = 4$.
אז $h(g)$ היא פונקציה מA לC שמוגדרת: $h(g)(1) = f \circ g(1) = f(g(1)) = 1(3) = 5$, ו $h(g)(2) = f \circ g(2) = f(g(2)) = f(4) = 6$.
האם h חח"ע? האם היא על?
פתרון:
h לא על.
הוכחה: לפונקציה $k : A \to C$ שמוגדרת: $k(1) = k(2) = 7$ אין מקור.
הסבר, נניח שיש $g : A \to B$ כך ש $f \circ g = k$, אז $f \circ g(1) = k(1) = 7$. כלומר, $f(g(1)) = 7$. אבל f לא שולחת שום מספר ל7. סתירה.
h חח"ח.
הוכחה: נניח ש$h(g_1) = h(g_2)$ עבור שתי פונקציות מAלB, ורוצים להיכיח ש $g_1 = g_2$.
כלומר, $f \circ g_1 = f \circ g_2$. זה אומר, שלכל $x \in A$, $f \circ g_1(x) = f \circ g_2(x)$. כלומר, $f(g_1(x)) = f(g_2(x))$. אפשר לראות מהגדרת f שהיא חח"ע. לכן נקבל שלכל $x \in A$, $g_1(x) = g_2(x)$. וזה בדיוק אומר ש $g_1 = g_2$.

4. תהי קבוצה. נסמן ב$\{0,1\}^A$ את אוסף הפונקציות מA ל$\{0,1\}$. נגדיר פונקציה $f:\{0,1\}^A \to P(A)$ באופן הבא:

תהי $g \in \{0,1\}^A$ פונקציה מA ל$\{0,1\}$. אז $f(g)$ שווה לתת קבוצה של A של כל האיברים שהפונקציה g שולחת ל1. לשם הנוחות נסמן את התת קבוצה הזאת ב $g^{-1}[\{1\}]$. כלומר, $f(g)=g^{-1}[\{1\}]$. דרך נוספת להגדיר את הקבוצה הזאת היא: אוסף המקורות של 1.

הוכיחו שf חח"ע ועל.

(דוגמא: נניח שA היא הקבוצה $\{2,3,4\}$. ונקח את הפונקציה הבאה: $g \in \{0,1\}^A$ שמוגדרת כך: $g(2)=0, g(3)=g(4)=1$. אז $f(g)=g^{-1}[\{1\}]=\{3,4\}$.)

פתרון:

נוכיח על: תהי $C \in P(A)$ תת קבוצה של A. צריך למצוא פונקציה g כך ש $f(g)=C$. כלומר, שC היא בדיוק קבוצת האיברים בA שg שולחת ל1. אז נגדיר g באופן הבא:

$$g(x)=\begin{cases}1 & x\in C\\ 0 & x\in A\setminus C\end{cases}$$

.

אז g היא פונקציה מA ל$\{0,1\}$. ומתקיים שקבוצות המקורות של 1 היא C. כלומר, $f(g)=C$.

נוכיח חח"ע: יהיו$g_1 \neq g_2$ שתי פונקציות שונות מA ל$\{0,1\}$. כלומר, יש $x \in A$ כך ש $g_1(x) \neq g_2(x)$. יש 2 אפשרויות: או ש $g_1(x)=0 \wedge g_2(x)=1$. או ש: $g_1(x)=1 \wedge g_2(x)=0$.

אם האופציה הראשונה קורית, אז $x \in g_2^{-1}[\{1\}]$ ו $x \notin g_1^{-1}[\{1\}]$. כלומר, $x \in f(g_2)$ ו$x \notin f(g_1)$. לכן $f(g_1) \neq f(g_2)$.

אם האופציה השניה קורית, אז $x \in g_2^{-1}[\{1\}]$ ו $x \notin g_2^{-1}[\{1\}]$. כלומר, $x \in f(g_1)$ ו$x \notin f(g_2)$. לכן $f(g_1) \neq f(g_2)$.