

מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"ג

תאריך: 15/09/22

מרצה: ד"ר ארז שיינר.

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

שאלה 1: נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x + 2 & x < -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $|f(x)| \geq x$

שאלה 2: מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $-iz^5 = cis(\pi) + i$

שאלה 3:

- א. מצאו את ההיטל של הוקטור $(1,1,1)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,2,3)$.
ב. מצאו את ההיטל של הוקטור $(1, a, 0)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,1,1)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a .
(זכרו: ההפרש בין הוקטור להיטל - מאונך לישר.)

שאלה 4:

א. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

ב. הסיקו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

שאלה 5: יהי $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, פתרו את האינטגרל

$$\int x^2 e^{ax} dx$$

שאלה 6:

הגדרה: תהי X קבוצת קבוצות של מספרים טבעיים. X נקראת **כיסוי** אם

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists A \in X: n \in A$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה כיסוי.

ב. קבעו והוכיחו לכל אחת מן הקבוצות הבאות אם היא כיסוי:

$$Z = \{\{1,2, \dots, 2n\} | n \in \mathbb{N}\}$$

$$Y = \{\{n+1, n+2\} | n \in \mathbb{N}\}$$

$$X = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$$

שאלה 7: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \in B$ וכן $B \in C$ אזי $C \setminus \{A\} \neq \emptyset$.

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B \cup C$ אזי $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$.