תרגיל 1 – אנליזה פונקציונלית

תרגיל 1

אילו מהפונקציות הבאות מהוות נורמה על המרחבים הנתונים

(א) $||f|| = |f(0)| + max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|$
במרחב $C^1([0,1])$ - מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע [0,1]

(ב) $||x|| = \frac{1}{3}(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{x_1^2+x_3^2}+\sqrt{x_2^2+x_3^2})$ כאשר x ב$\mathbb{R}^3$

(ג) $||f|| = \int_0^\pi |f(x)|cos(x)$ במרחב C([0,π])

תרגיל 2

הוכיחו את א ואחד מבין הסעיפים ב עד ד.

(א) הראו שעבור $x \in \mathbb{R}^k$ מתקיים $lim_{p\to\infty}(||x||_p) = ||x||_\infty$

(ב) הוכיחו כי $||\cdot||_p$ אינה נורמה על $\mathbb{R}^n$ עבור p∈ $(0,1)$

(ג) הוכיחו כי $||\cdot||_p$ אינה נורמה על $L^p([0,1])\cap C([0,1])$ עבור $p \in (0,1)$

(ד) הראו שנורמת אינסוף אינה מושרית ממכפלה פנימית . למעשה $C^\infty([0,1])$ אינו מרחב מכפלה פנימית.
(רמז: השתמשו בשיוויון המקבילית.)

תרגיל 3

מצאו את הסגור, הפנים והשפה(ראו סעיף הבא) של 4 מבין הקבוצות הבאות (במרחב $\mathbb{R}^2$ או $\mathbb{R}^k$). כמו כן ציינו האם הקבוצות קומפקטיות

(א) $A = \{(x,y) \in (0,1)X(0,1) \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$

(ב) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$

(ג) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 4\}$

(ד) $D = \{(x, cos\ x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(ה) $E = \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x||_2^2 > 4\}$

תרגיל 4

תהי A קבוצה ב$\mathbb{R}^n$. השפה של קבוצה מוגדרת להיות : $\partial A := \bar{A} - int\ A$

(א) הוכיחו את האפיון הבא של השפה: $x_0 \in \partial A$ אםם לכל ϵ קיימים $x,y \in B_\epsilon(x_0)$ כך ש $x \in A, y \in A^c$

(ב) הוכיחו כי ∂A קבוצה סגורה

(ג) נתון כי A סגורה. הוכיחו כי $\partial(\partial A) = \partial A$

(ד) בונוס (5 נק') : מצאו קב' A כך ש $\partial(\partial A) \neq \partial A$.

תרגיל 5

(א) הוכיחו כי l_1 מהווה תת מרחב של l_2 .

(ב) האם הוא מהווה תת מרחב סגור?

תרגיל 6

נסמן ב- l^∞ את מרחב הסדרות האינסופיות החסומות של מספרים ממשיים, כלומר

$$l^\infty=\left\{a=\left(a_1,a_2,a_3,...\right):\forall a,\ \exists m=m_a>0,\left|a_i\right|\le m,\forall i\ge 1\right\}$$

על l^∞ נגדיר את הנורמה $\left\|a\right\|=\sup\limits_{i\ge 1}\left|a_i\right|$. תהי A תת-קבוצה של l^∞ המוגדרת לפי

$$A=\left\{a=\left(a_1,a_2,a_3,...\right)\in l^\infty:\left|a_n\right|\le\frac{1}{n},\forall n\ge 1\right\}$$

א. האם A היא קבוצה פתוחה ב- l^∞? (10 נק')

ב. האם A היא קבוצה סגורה ב- l^∞? (15 נק')

<u>הערה:</u> זכרו שקבוצה A היא סגורה אם עבור סדרת איברים $\left\{x_n=\left(x_{n,1},x_{n,2},x_{n,3},...\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$ ואיבר $y=\left(y_1,y_2,y_3,...\right)\in l^\infty$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|y-x_n\right\|=0$ מתקיים ש- $y\in A$.

תרגיל 7

נסמן ב- X את מרחב כל הפונקציות הרציפות והחסומות על הישר הממשי המקבלות ערכים ממשיים, כלומר

$$\mathrm{X}=\left\{f\in C\left(-\infty,\infty\right):\forall f,\exists m=m_f,\left|f\left(x\right)\right|\le m,\forall x\in\left(-\infty,\infty\right)\right\}$$

על X נגדיר את נורמת הסופרמום $\left\|f\right\|=\sup\limits_{|x|<\infty}\left|f\left(x\right)\right|$. תהי A התת קבוצה של X המוגדרת לפי

$$A=\left\{f\in\mathrm{X}:\exists x_0,f\left(x_0\right)=0\right\}$$

(כלומר A היא קבוצת הפונקציות מ- X שמתאפסות עבור נקודה כלשהי, או באופן שקול זוהי קבוצת הפונקציות מתוך X שהגרף שלהן חותך את הציר הממשי). הוכיחו ש- A איננה קבוצה סגורה, כלומר מצאו סדרה $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ של פונקציות מתוך A ופונקציה $f\in\mathrm{X}$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f_n-f\right\|=0$ אבל $f\notin A$. (20 נק')