

תרגיל 4 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות $u(x, y)$ הבאות, מצאו $v(x, y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

(א) $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ בכל \mathbb{C} .

(ב) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ ב $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \bar{z}$ גזירה.

3. מצאו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

(א) $(1+i)^{2i}$

(ב) $(-i)^{-i}$

(ג) $\text{Im}((1-i)^{1+i})$

4. הראו שחוק החזקות $e^{zw} = (e^z)^w$ נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף העיקרי של הלוגריתם) ע"י בחירה של z, w מתאימים.

5. יהי Log הענף העיקרי של הלוגריתם.

(א) הראו כי לכל z בתחום ההגדרה של Log מתקיים

$$\text{Log} \frac{1}{z} = -\log z$$

(ב) הראו שכלל זה לא בהכרח נכון עבור ענפים אחרים של הלוגריתם.

6. חשבו $\int_{\gamma} z \sin x dz$ כאשר $x = \operatorname{Re} z$ ו- γ מסילה המורכבת משלושה קטעים ישרים: מ- i ל- 0 , מ- 0 ל- 1 ומ- 1 ל- $1+i$.