חשבון אינפי 1

תרגיל 10 - פתרון

1. גזרו את הפונקציות הבאות

א. $$\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,\frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

ב. $$\left(e^{\sqrt{\ln x}}\right)'=e^{\sqrt{\ln x}}\,\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

ג.

$$\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}\right)'=\left(e^{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}}\right)'=\left(e^{1/x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\right)'=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\cos x}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

ד. $$\left(\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}\right)'=\left(e^{\ln\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{2x}\ln 2}\right)'=\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}\left(-\frac{\ln 2}{2x^2}\right)$$

ה. $$\left(|x|\sin x\right)'=\begin{cases}\left(x\sin x\right)' & ,x\ge 0\\ \left(-x\sin x\right)' & x<0\end{cases}=\begin{cases}\sin x+x\cos x & ,x\ge 0\\ -\sin x-x\cos x & x<0\end{cases}$$

ו. $$y=\left(\sqrt{2x+1}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$$

$$\ln y=\ln\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{2x+1}\right)=\left(-\ln x\right)\cdot\frac{1}{2}\ln\left(2x+1\right)$$

$$\ln y=-\frac{1}{2}\cdot\left(\ln x\right)\cdot\left(\ln\left(2x+1\right)\right)$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\ln\left(2x+1\right)+\frac{2}{2x+1}\ln x\right)$$

$$y'=\left(\sqrt{2x+1}\right)^{\ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2x}\ln\left(2x+1\right)-\frac{\ln x}{2x+1}\right)$$

2. נתון :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax} & x\neq 0\\ b & x=0\end{cases}$$

$$f'(0)=2$$
$$a=?;b=?$$

נחשב את הנגזרת של $f(x)$ בנקודה $x=0$. לפי הגדרת הנגזרת לכל $b\neq 0$ נקבל :

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax}-b}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax^2}\cdot x-b}{x}\underset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=1}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{0-b}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-b}{x}$$

והגבול לא קיים , ז"א לכל $b\neq 0$ הפונקציה לא גזירה ב- $x=0$.

אבל נתון ש - $f'(0)=2$, ולכן $b=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax^2}=\frac{1}{a}=2$$

ולכן $a=\frac{1}{2}$.

לסיכום : קיבלנו $a=\frac{1}{2}$, $b=0$.

.3

1) נתון כי f גזירה ב - $\mathbb{R}$ ולכל x,y מתקיים: $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$.
בלי הגבלת כלליות ניקח x כלשהו, נחלק ב-y ולאחר מכן נשאיף את y ל-0. נקבל:

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(y)}{y}\right)+2x$$

אגף שמאל הוא בעצם $f'(x)$, ומכיוון שנתון כי f גזירה בכל נק', הגבול באגף ימין קיים וסופי ושווה למס' כלשהו. הסיבה היא שגבול זה הוא בדיוק $f'(0)$ שכן עפ"י ההגדרה $f'(0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0+y)-f(0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}$ אבל

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)+2\cdot 0\cdot 0\Rightarrow f(0)=0$$

כלומר קיבלנו $f'(x)=A+2x$. אם נגזור ביטוי זה בשנית, נקבל: $f''(x)=2$

2) ל$f(x)$ 101 שורשים שהם המספרים השלמים בין 0 ל-100. כעת f פולינום ומתקיים לכל i שלם בין 0 ל-99 התכונות הבאות:
א) f רציפה בקטע הסגור $[i,i+1]$ וגזירה בקטע $(i,i+1)$.
ב) $f(i)=f(i+1)=0$
לכן עפ"י משפט רול בכל קטע כזה $(i,i+1)$ קיימת נקודה c_i כך ש $f'(c_i)=0$ ובסה"כ קיבלנו שיש לכל הפחות 100 נקודות בהן הנגזרת מתאפסת. מצד שני f פולינום ממעלה 101 ולכן הנגזרת f' הוא פולינום ממעלה 100 שלו יתכנו לכל היותר 100 שורשים (עפ"י המשפט היסודי של האלגברה) מכאן שלמשוואה $f'(x)=0$ בדיוק 100 פתרונות.

3) הפרכה- התבוננו בפונקציה $f(x)=x^3$ בקטע $[-1,1]$ מתקיים $0\in(-1,1)$ ו- f גזירה ב-$[-1,1]$ וכן $f'(0)=0$ אבל f חח"ע.

4)

$$f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2} \Rightarrow f^{'}(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\left(8x-x^2\right)^{-\frac{2}{3}}(8-2x)=\frac{(8-2x)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(8x-x^2\right)^2}}=0 \Rightarrow x=4$$

5) נתון כי f רציפה ב $-[a,b]$ וגזירה ב $-(a,b)$ פרט למס' סופי של נקודות. נסמן נק' אלו: $x_1,x_2,...,x_n$ כאשר n סופי. כל הקטעים $[a,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n],[x_n,b]$ עומדים בתנאי משפט לגרנז' (יש רציפות בקטע הסגור וגזירות בקטע הפתוח), ולכן בכל אחד מהקטעים הפתוחים

קיימת נק' c_i עבורה: $f'(c_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$. נסמן נק' אלו ב- $c_1,c_2,...,c_{n+1}$.
(כי יש $n+1$ קטעים). את הנק' c_i עבורה $\left|f'(c_i)\right|$ מקסימלי נסמן ב-c,
ונקבל:

$$\begin{aligned}
&|f(b)-f(a)|=|f(b)-f(x_n)+f(x_n)-f(x_{n-1})+...-f(x_1)+f(x_1)-f(a)|\le\\
&\le|f(b)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_{n-1})|+...+|f(x_2)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(a)|=\\
&=|f'(c_1)||b-x_n|+|f'(c_2)||x_n-x_{n-1}|+|f'(c_2)||x_{n-1}-x_{n-2}|+...+|f'(c_{n+1})||x_1-a|\le\\
&\le|f'(c)||b-x_n|+|f'(c)||x_n-x_{n-1}|+|f'(c)||x_{n-1}-x_{n-2}|+...+|f'(c)||x_1-a|=|f'(c)||b-a|
\end{aligned}$$

6)נתבונן בפונקציה $f(x)=\ln(1+x)$ יהיו $b>a>0$. מתקיים f רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) ולכן עפ"י לגרנז' נקבל שקימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$. לכן, קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}=\frac{1}{1+c}$ (*).

אם נפשט את (*) נקבל- $\frac{\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)}{b-a}=\frac{1}{1+c}$ ומכיון ש $0<a<c<b$ נקבל $\frac{1}{1+b}<\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+a}$ ולכן $\frac{1}{1+b}<\frac{\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)}{b-a}<\frac{1}{1+a}$ ומכיון ש $b>a$ נקבל לבסוף

$\frac{b-a}{1+b}<\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)<\frac{b-a}{1+a}$.