

תרגול כיתה 10 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה  
התפלגויות רציפות מיוחדות, מ"מ זו-מימדיים רציפים, קונבולוציה

**נוסחאות:**

(1). התפלגות אחידה רציפה  $X \sim U(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

התוחלת והשונות:

(2). התפלגות מעריכית  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

פונקציית הצפיפות:

$$E(X) = 1/\lambda \quad V(X) = 1/\lambda^2$$

התוחלת והשונות:

הערה: בהתפלגות זו (בדומה להתפלגות הגיאומטרית) קיימת תכונת "חוסר הזכרון":  
 $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$ , לכל  $s, t \geq 0$ .

**שאלה 1**

דני מחכה משעה 16:00 לפגישה עם חברו. ידוע כי החבר יגיע ברגע כלשהו בין 16:00 ל-16:40 באופן שווה.

א. מהי ההסתברות שדני יצטרך להמתין למעלה מ-20 דקות?

ב. אם עד 16:20 לא הגיע החבר, מה הסיכוי שיצטרך עדיין להמתין עוד 10 דקות לפחות?

פתרון:

נסמן ב- $X$  את הזמן בו יגיע החבר מרגע שדני התחיל לחכות (מ-16:00 ואילך), פונקציית הצפיפות של  $X$  אחידה-

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}, & 0 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

א). הסיכוי שדני יחכה 20 דקות לפחות הוא  $\int_{20}^{40} \frac{1}{40} dx = \frac{x}{40} \Big|_{20}^{40} = \frac{1}{2}$

(ב). בהנחה כי דני כבר חיכה 20 דקות, הסיכוי כי יחכה עוד 10 דקות לפחות הוא

$$P(X \geq 30 | X \geq 20) = \frac{P(X \geq 30 \cap X \geq 20)}{P(X \geq 20)} = \frac{P(X \geq 30)}{P(X \geq 20)}$$

נציב את פונקציית הצפיפות:

$$\frac{\int_{30}^{40} \frac{dx}{40}}{\int_{20}^{40} \frac{dx}{40}} = \frac{\left. \frac{x}{40} \right|_{30}^{40}}{\left. \frac{x}{40} \right|_{20}^{40}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

## שאלה 2

אורך החיים של נורה דלוקה הוא משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם ממוצע 100 שעות.

- מה ההסתברות שהנורה תדלק יותר מ-80 שעות אך פחות מ-110 שעות?
- חשב את ההסתברות שאורך חיי נורה יעלה על 110 שעות בהינתן שהיא דולקת כבר 80 שעות.
- מהי שונות זמן חיי נורה דלוקה?

פתרון:

(א). נסמן ב- $X$  את אורך חיי הנורה, אזי  $\lambda = 1/100 \Rightarrow E(X) = 100$ , לכן הצפיפות של  $X$  היא

$$f_X(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} \text{ אזי}$$

ההסתברות שהנורה תדלק יותר מ-80 שעות אך פחות מ-110 שעות

$$\int_{80}^{110} \frac{1}{100} e^{-\frac{t}{100}} dt = -e^{-\frac{t}{100}} \Big|_{80}^{110} = e^{-\frac{80}{100}} - e^{-\frac{110}{100}} \approx 0.1165$$

(ב). נעזר בתכונת חוסר הזכרון של ההתפלגות המעריכית

$$P(x > 110 | x > 80) = P(X > 30)$$

$$P(X > 30) = \int_{30}^{\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{t}{100}} dt = -e^{-\frac{t}{100}} \Big|_{30}^{\infty} = e^{-\frac{30}{100}} \approx 0.741$$

(ג). השונות (בשעות):

$$V(X) = 1/\lambda^2 = \frac{1}{(1/100)^2} = 10,000$$

מ"מ דו-מימדיים רציפיםשאלה 3נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשב את ההסתברויות הבאות:

א.  $P(X > 1, Y < 1)$

ב.  $P(X < Y)$

ג.  $P(X < a)$  ( $a > 0$  – קבוע)

פתרון:

$$P(X > 1, Y < 1) = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=1}^{x=\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy = \int_0^1 2e^{-2y} \left( -e^{-x} \Big|_1^\infty \right) dy \quad \text{א.}$$

$$= e^{-1} \int_0^1 2e^{-2y} dy = e^{-1} (1 - e^{-2})$$

$$P(X < Y) = \iint_{x < y} 2e^{-x}e^{-2y} dx dy = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^y 2e^{-x}e^{-2y} dx dy \quad \text{ב.}$$

$$= \int_0^{\infty} 2e^{-2y} (1 - e^{-y}) dy = \int_0^{\infty} 2e^{-2y} dy - \int_0^{\infty} 2e^{-3y} dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(X < a) = \int_0^a \int_0^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y} dy dx = \int_0^a \left[ -e^{-x-2y} \right]_{y=0}^{y=\infty} dx \quad \text{ג.}$$

$$= \int_0^a e^{-x} dx = \left[ -e^{-x} \right]_0^a = 1 - e^{-a}$$

שאלה 4פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X, Y$  נתונה ע"י:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(1-x-y) & 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

מצא את:

א. הקבוע  $c$ .

ב.  $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$

ג.  $\rho(X, Y)$

פתרון:

$$1 = \iint f(x, y) dy dx \quad \text{א. צריך להתקיים}$$

$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} c(1-x-y) dy dx \quad \text{כלומר:}$$

$$1 = \int_0^1 c \left[ y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{c}{2} (1-x)^2 dx = \frac{c}{6} \quad \Rightarrow \boxed{c=6}$$

ב. בכדי למצוא את התוחלת של  $X$  נמצא תחילה את הצפיפות השולית שלו:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 6(1-x-y) dy = 3 \left[ 2y - 2xy - y^2 \right]_0^{1-x} = 3(x-1)^2$$

$$\text{מטעמי סימטריה } f_Y(y) = 3(y-1)^2$$

$$E(Y) = E(X) = \int_0^1 x \cdot 3(x-1)^2 dx \quad \text{לכן התוחלת:}$$

$$= \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x) dx = \left[ \frac{3x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$V(Y) = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \text{והשונות:}$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot 3(x-1)^2 dx - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left[ \frac{3x^5}{5} - \frac{6x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} \right]_0^1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{80}}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \quad \text{ג.}$$

$$E(X \cdot Y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} x \cdot y \cdot 6(1-x-y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[ -xy^2(2y-3+3x) \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 -x(1-x)^3 dx$$

$$= \left[ \frac{-x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{1}{20} - \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\frac{3}{80} \cdot \frac{3}{80}}} = \boxed{-\frac{1}{3}} \quad \text{נציב את המרכיבים בנוסחת מקדם המתאם:}$$

קונבולוציה

שימוש חשוב של קונבולוציה בהסתברות הוא חישוב סכום של מ"מ בלתי תלויים.  
 כאשר  $Y, X$  מ"מ ב"ת וסכומם  $Z = X + Y$  אזי –  
עבור משתנים בדידים:

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_i P(X = i, Y = k - i) = \sum_i P(X = i) P(Y = k - i)$$

עבור משתנים רציפים:

$$P(Z \leq k) = P(X + Y \leq k) \Rightarrow f_Z(k) = f_{X+Y}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(k - y) f_Y(y) dy$$

שאלה 5

יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת כך ש-  $Y \sim Exp(\lambda), X \sim Exp(\lambda)$ . מצא בעזרת קונבולוציה את התפלגות  $Z = X + Y$ .

פתרון:

פונקציות הצפיפות של  $X$  ו- $Y$  הן-

$$f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

נעזר בנוסחת הקונבולוציה:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int_0^z \lambda e^{-(z-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dy = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & else \end{cases} \quad \text{קיבלנו:}$$

הערה: צפיפות זו ניתנת לזיהוי כהתפלגות גמא עם הפרמטרים  $Z \sim Gamma(\alpha = 2, \lambda)$ .

שאלה 6

יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת כך ש-  $Y \sim Bin(m, p), X \sim Bin(n, p)$ . מצא ע"י קונבולוציה את התפלגות  $Z = X + Y$ .

פתרון:

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^n P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^n P(X = i) P(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \quad \left\{ (*): \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \right\} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \binom{n+m}{k} \\ &= Bin(n+m, p) \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בזהות הבינומית (\*) לעיל וכן בכך ש-  $\binom{b}{a} = 0$  כאשר  $a > b$ .