

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 3

שאלה 1

- מצאו את הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{3}$ מעל \mathbb{Q} .
- מצאו את הפולינום המינימלי של $\rho_8 = e^{\frac{\pi i}{4}}$ (שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 8) מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
- מצאו את הפולינום המינימלי של ρ_8 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

שאלה 2

יהי $K = \mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - x + 1 \rangle$. נסמן $\alpha = x + \langle x^3 - x + 1 \rangle \in K$. חשבו ב- K את:

- $(\alpha^2 + 1)^3$
- $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

התשובות חייבות להיות פולינומים ממעלה 2 או פחות ב- α . בפיתרון ניתן להשתמש בעובדה ש- K שדה (אם זה עוזר לכם באופן כלשהו).

בנוסף: הראו כי K שדה.

שאלה 3

יהי $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}]$.

- חשבו את $[K:\mathbb{Q}]$.
- מצאו בסיס ל- K כמרחב וקטורי מעל \mathbb{Q} . [הוכיחו כי זה אכן בסיס!]
- כתבו את $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ כצירוף לינארי של אברי הבסיס מסעיף 1.
- מצאו בסיס ל- K כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$. [הוכיחו כי זה אכן בסיס!]
- מצאו את הפולינום המינימלי של $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ מעל \mathbb{Q} והראו כי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{7}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{7}]$.
- מה הפולינום המינימלי של $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$? נמקו את תשובתכם.

תזכורת

בשיעור ציינו את הטענה הבאה. אתם רשאים להיעזר בה במידת הצורך.

טענה: יהי R תחום שלמות, $F \subseteq R$ שדה, $a \in F$ ו- $f \in F[x]$ כך ש- $f(a) = 0$. נסמן $n = \deg f$. אזי התנאים הבאים שקולים:

- הוא הפולינום המינימלי של a מעל F .
- אי פריק מעל F .
- הקבוצה $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ בלתי תלויה לינארית מעל F .
- $[F[a]:F] = \deg f$.

בכל מקרה, $F[a]$ הוא שדה ומתקיים $[F[a]:F] \leq \deg f$.

¹ זהירות: אם R אינו תחום, ייתכן ש- f פריק. אם f פריק אז $F[a]$ אינו שדה.