# בדידה להנדסה- תרגיל 7

13 במאי 2019

1. יהיו $R_0 \subseteq R_1$ יחסים על קבוצה $A$, הוכח/הפרך:
   א. $R_0$ רפלקסיבי $\Leftarrow$ $R_1$ רפלקסיבי.
   ב. $R_0$ סימטרי $\Leftarrow$ $R_1$ סימטרי.
   פתרון:
   א. נכון. $R_0$ רפלקסיבי $\Leftarrow I_A \subseteq R_0 \Leftarrow I_A \subseteq R_1 \Leftarrow R_1$ רפלקסיבי.
   ב. לא נכון. $A = \{1,2\}$, $R_0 = \phi$, $R_1 = \{(1,2)\}$.

2. תהי $A$ קבוצה לא ריקה ותהי $\{R_i\}_{i\in I}$ משפחה של יחסים רפלקסיביים וסימטריים עליה.
   א. הוכח: $R = \bigcap_{i\in I} R_i$ רפלקסיבי וסימטרי. האם זה נכון עבור $R = \bigcup_{i\in I} R_i$ ?
   הערה: הטענה נכונה גם עבור התכונה "טרנזיטיביות" שנלמד בהמשך.
   ב. נסמן $R_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : n|(x-y)\}$, מצא מהם:
   1. $R_1$ 2. $R_2$ 3. $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$
   פתרון:
   א. רפלקסיביות: $\forall i \in I : I_A \subseteq R_i$ (כי $R_i$ רפלקסיבי, מהנתון) $\Leftarrow$ $\bigcap_{i\in I} R_i = R \Leftarrow$
   $I_A \subseteq$ $R \Leftarrow$ רפלקסיבי.
   סימטריות: יהי $(a,b) \in R$.
   $(a,b) \in \bigcap_{i\in I} R_i \Leftarrow \forall i \in I : (a,b) \in R_i \Leftarrow \forall i \in I : (b,a) \in R_i$ (כי $R_i$ סימטרי, מהנתון) $\Leftarrow$
   $(b,a) \in \bigcap_{i\in I} R_i = R \Leftarrow R$ סימטרי.
   ב. 1. $R_1 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 2. $R_2 = \{(x,y) : a\, and\, b\, have\, the\, same\, parity\}$ 3. $R = \phi$

3. תהי $A$ קבוצה ונגדיר יחס $R$ על $P(A)$ כך: $R = \{(X,Y) : X \triangle Y = \phi\}$.
   האם $R$ רפלקסיבי/סימטרי? מהו היחס $R$?
   פתרון:
   $$X \triangle Y = (X\cup Y)\setminus(X\cap Y) = \phi \Leftrightarrow (X\cup Y) \subseteq (X\cap Y) \Leftrightarrow X,Y \subseteq X\cap Y \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Leftrightarrow X = Y$$
   לכן: $R = \{(X,Y) : X = Y\} = I_A$, כלומר $R$ הוא יחס היחידה(ובפרט רפלקסיבי וסימטרי).

4. נגדיר יחס $R$ על $\mathbb{Z}$ כך: $R = \{(a,b) : 5|(2a+3b)\}$.
   האם $R$ רפלקסיבי/סימטרי?
   פתרון:
   רפלקסיביות: $\forall a \in \mathbb{Z} : 2a + 3a = 5a \Rightarrow 5|(2a+3a) \Rightarrow (a,a) \in R$.

סימטריות: נניח $(a,b) \in R$, אזי $5|(2a+3b)$.
כעת, $2b+3a = 5b-3b+5a-2a = 5(a+b)-(2a+3b)$
$5|5(a+b)$ וכן $5|(2a+3b)$ ולכן $5|(2b+3a)$ (אם מספר מחלק שני מספרים אז הוא מחלק גם את ההפרש)
אזי $(b,a) \in R \Leftarrow R$ סימטרי.

5. תהי $A$ קבוצה ו־$R$ יחס רפלקסיבי עליה.
הוכח: $\forall n \in \mathbb{N} : R^n \subseteq R^{n+1}$, כלומר $R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \ldots$.
מצא תנאי מספיק לכך ש: $\forall n \in \mathbb{N} : R^n = R^{n+1}$.
פתרון:
נשים לב כי $R^{n+1} = R^n R$. יהי $(a,b) \in R^n$, צריך להוכיח כי $(a,b) \in R^{n+1}$.
נשים לש שכיוון ש־ $R$ רפלקסיבימתקיים ש־ $(b,b) \in R$, ולכן מהגדרת הרכבת יחסים נקבל שאם $(a,b) \in R^n \wedge (b,b) \in R$ אז $(a,b) \in R^{n+1}$, כדרוש.

6. כמה יחסים יש על קבוצה בגודל $n$? כמה מהם רפלקסיביים?
פתרון:
נסמן $n = |A|$, כל יחס הוא תת־קבוצה של $A \times A$.
$|A \times A| = n^2$, ולכן מספר היחסים הוא $2^{n^2}$.
כל יחס רפלקסיבי מכיל את יחס היחידה, כלומר $R = I_A \cup B$,
כאשר $B \subseteq (A \times A) \setminus I_A$ תת קבוצה כלשהי, לכן מספר האפשרויות "להשלים" את היחס $R$ הוא מספר תתי הקבוצות של $(A \times A) \setminus I_A$.
$|(A \times A) \setminus I_A| = n^2 - n$ ולכן מספר היחסים הוא $2^{n^2-n}$.