פתרון תַּרְגִיל בַּיִת מִסְפָּר 11

מטריצות מעבר בסיס

תרגילים מהחוברת:

עמוד 46 והלאה:

שאלה 9.4

א) יהי $v=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ נראה כי מתקיים $v=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$ $(*)$. ברור כי $\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n\in F^n$ לכן כדי להוכיח את השוויון $(*)$ מ"ל את השווין ברכיב i לכל $1\le i\le n$.

כזכור: $\forall 1\le i,j\le n,\ (e_j)_i=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$ לכן:

$$(\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n)_i=\left(\sum_{j=1}^n\alpha_je_j\right)_i=\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\alpha_je_j\right)_i+(\alpha_ie_i)_i=$$

$$\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\alpha_j(e_j)_i\right)+\alpha_i(e_i)_i=\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\alpha_j\cdot 0\right)+\alpha_i\cdot 1=\alpha_i=v_i$$

ב) מכיון ש $S=\{e_1,\dots,e_n\}$ אזי לכל $v=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ נקבל עפ"י סעיף א' כי $[v]_S=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

שאלה 10.5 ו'

$V=\mathbb{R}^2$, $B=\{(4,5),(1,0)\},C=\{(1,1),(2,3)\}$ למעשה עפ"י השאלה אנו מחפשים את P_C^B אנו נמצא את המטריצה עפ"י הרעיון בסעיפים א-ה.

מתקיים $P_C^B=P_C^S\cdot P_S^B=\left(P_S^C\right)^{-1}\cdot P_S^B$ באשר $S=\{(1,0),(0,1)\}$ הבסיס הסטנדרטי.

$P_S^B=\begin{pmatrix}4&1\\5&0\end{pmatrix}, P_S^C=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$ כעת עליכם רק למצוא את $\left(P_S^C\right)^{-1}$ שהיא ההופכית של P_S^C בשימוש האלגוריתם המוכר ולהכפיל ב P_S^B. המטריצה שתתקבל היא מטריצת המעבר המבוקשת.

תרגיל לא מהחוברת:

נתבונן בשני בסיסים עבור $\mathbb{R}^3$: $B=\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}\right\}$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

א. מצאו את מטריצות המעבר בין בסיסים: $\left[I\right]_B^S$, $\left[I\right]_S^B$.

ב. יהי נתון $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. מצאו את $\left[v\right]_S$.

ג. בעזרת שני הסעיפים הקודמים (ולא אחרת!!!) מצאו את $\left[v\right]_B$.

<u>פתרון:</u>

א. $\left[I\right]_B^S=\left(\left[I\right]_S^B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0.75&-0.25&0\\-0.5&0.5&0\\-0.28125&0.09375&0.125\end{pmatrix}$, $\left[I\right]_S^B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&3&0\\3&0&8\end{pmatrix}$.

ב. $\left[v\right]_S=(1,2,3)$.

ג. ידוע שמתקיים $\left[v\right]_B=\left[I\right]_B^S\left[v\right]_S$. אצלנו -

$$\left[v\right]_B=\begin{pmatrix}0.75&-0.25&0\\-0.5&0.5&0\\-0.28125&0.09375&0.125\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\\\frac{9}{32}\end{pmatrix}$$

העתקות ליניאריות

תרגילים מהחוברת:

עמוד 52 והלאה:

שאלה 1.8

א. T לא העתקה ליניארית כי אם ניקח $z\in\mathbb{C}$ נקבל שקיים $\alpha\in\mathbb{C}$ שעבורו מתקיים $T(\alpha z)=\overline{\alpha z}=\overline{\alpha}T(z)\neq\alpha T(z)$.

ב. T העתקה ליניארית. הוכחה:

יהיו $z_1,z_2\in\mathbb{C},\alpha\in\mathbb{R}$ כעת מכיוון ש $\alpha\in\mathbb{R}$ נקבל $\alpha=\overline{\alpha}$ ואז $T(z_1+\alpha z_2)=\overline{z_1+\alpha z_2}=\overline{z_1}+\overline{\alpha}\cdot\overline{z_2}=T(z_1)+\alpha T(z_2)$.

שאלה 1.10

א. בדיקה ישירה לפי ההגדרה.

ב. כנ"ל

ג. לשם כך נשים לב שמתקיים

$$T(x,y)=(x+2y,2x+y)=\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)^t$$

$$T(v)=v^tA\ ,\ A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

ואז הליניאריות של T נובעת ישירות מסעיף ב'.

ד. $T(v)=Av+b$ אינה הע"ל (עבור $b\neq 0$) כי , למשל, לא מתקיימת התכונה של

$$T(\alpha v)=A(\alpha v)+b=\alpha Av+b$$

הכפל בסקלר: $\alpha T(v)=\alpha(Av+b)=\alpha Av+\alpha b$

$$\rightarrow\forall\alpha\in F\quad \alpha b=b\rightarrow b=0$$

ה. באופן דומה להוכחות בסעיפים הקודמים.

שאלה 1.11

א. נניח שקיים צירוף ליניארי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=0_V$. נוכיח שהוא טריוויאלי. נפעיל T על שני האגפים ונשתמש בכך ש T הע"ל כדי לקבל $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iT(v_i)=T(0_V)=0_W$. קיבלנו $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iT(v_i)=0_W$ אבל נתון $T(v_1),\ldots T(v_n)$ בת"ל לכן מדובר בצירוף ליניארי טריוויאלי ומכאן גם הצירוף הליניארי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=0_V$ הוא טריויאלי ו $v_1,\ldots v_n$ בת"ל.

ב. נניח שקיים צירוף ליניארי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0_W$. נוכיח שהוא טריוויאלי. נשתמש בכך ש T הע"ל כדי לקבל $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}T(\alpha_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0_W=T(0_V)$. מכיון ש T חח"ע נקבל $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0_V$ ולבסוף ניעזר בכך ש $v_1,\dots v_n$ בת"ל כדי לקבל הדרוש.

<u>שאלה 1.19</u>

תהי $T:V\to U$ הע"ל הפיכה. נוכיח ש- $T^{-1}:U\to V$ היא הע"ל. לפי הנתון מתקיים $T^{-1}T=I_V$, $TT^{-1}=I_U$. נבדוק את שני התנאים של ההעתקה הליניארית בשלב אחד:
יהיו $\alpha\in F$, $u_1,u_2\in U$ אזי:

$$T^{-1}(\alpha u_1+u_2)=T^{-1}\left(\alpha T\left(T^{-1}(u_1)\right)+T\left(T^{-1}(u_2)\right)\right)=T^{-1}\left(T\left(\alpha T^{-1}(u_1)+T^{-1}(u_2)\right)\right)=$$
$$=\alpha T^{-1}(u_1)+T^{-1}(u_2)$$

<u>שאלה 1.29</u>

<u>טענת עזר 1:</u> תהי $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצה בת"ל. אזי גם הקבוצה $B'=\{v_1,v_2+v_1,...,v_n+v_1\}$ היא בת"ל.

<u>הוכחת טענת עזר 1:</u> נניח בשלילה ש- B' היא ת"ל. אזי קיימים $a_1,a_2,...,a_n\in F$ **לא כולם אפס** כך ש- $a_1v_1+a_2(v_2+v_1)+...+a_n(v_n+v_1)=0$

אך מתקיים:
$a_1v_1+a_2(v_2+v_1)+...+a_n(v_n+v_1)=(a_1+a_2+...+a_n)v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=0$. אך הקבוצה המקורית היא בת"ל ולכן $a_1+...+a_n=0$, $a_2=0,...,a_n=0$. וקל לראות שכל המקדמים יוצאים אפס, בסתירה להנחה. לכן הקבוצה B' היא בת"ל.

<u>טענת עזר 2:</u> $span\{v_1,v_2,...,v_n\}=span\{v_1,v_2+v_1,...,v_n+v_1\}$

<u>הוכחת טענת עזר 2:</u> תרגיל!

בחזרה לתרגיל:

תהי $T:V\to W$ הע"ל שאינה העתקת האפס. לכן קיים $0\neq v_1\in V$ כך ש- $T(v_1)\neq 0$.
נשלים את v_1 לבסיס של V : $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$. אם קיים $2\le i\le n$ עבורו $T(v_i)=0$ אזי נחליף את v_i ב- v_i+v_1 (ואז מובטח ש- $T(v_i+v_1)=T(v_i)+T(v_1)=T(v_1)\neq 0$).

לבסוף נקבל בסיס (לפי טענות העזר, לאחר כל ההחלפות הקבוצה עדיין תשאר בסיס) אשר לכל איבר בו, ההעתקה אינה שולחת אותו לאפס.

שאלה לא מהחוברת:

תהי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית כך שמתקיים:
$T(0,1)=(4,5,6),\ \ T(1,1)=(1,2,3)$. מצאו את ההעתקה בצורה מפורשת.

<u>פתרון:</u>

נייצג ווקטור כללי ב-$\mathbb{R}^2$ באמצעות הבסיס הנתון: $(x,y)=\alpha(0,1)+\beta(1,1)$. פותרים ומקבלים: $\alpha = y-x \quad \beta = x,$, כלומר: $(x,y)=(y-x)(0,1)+x(1,1)$ נפעיל את ההעתקה על שני האגפים, נשתמש בליניאריות שלה ונקבל:
$T(x,y)=(4y-3x,5y-3x,6y-3x)$.