

## לינארית 2 תשפ"א מועד ב

מרצה: עדי בן צבי.

מתרגלים: אריאל ויצמן, אמונה ליפסקר, גלעד פורת קורן, נועה כהן.

יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 113 נק.

זמן הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון.

המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.

**יש לציין בראש כל דף שאתם כותבים האם מדובר בטייטא או שזו התשובה אותה אתם**

**רוצים שתבדק.**

1. אין קשר בין הסעיפים.

(א) מצאו לאילו ערכי  $a$  המטריצה הבאה לכסינה אורתוגונלית.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ a & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הוכיחו תשובתכם. (12 נק)

(ב) הציבו את  $a$  מסעיף א (אם יצא יותר מערך אחד אפשרי אזי בחרו אחד מהם

כרצונכם) ולכסנו או'ג את המטריצה, כלומר מצאו מטריצה  $P$  אורתוגונלית

ומריצה  $D$  אלכסונית כך ש  $P^t A P = D$ . (13 נק)

2. אין קשר בין הסעיפים.

(א) מצאו את צורת הז'ורדן של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & n & n-1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ 0 & 0 & n & \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & n \end{pmatrix}$$

הוכיחו תשובתכם. (13 נק)

(ב) תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצה הפיכה. הוכיחו שניתן לרשום את  $A$  כסכום של

מטריצה הפיכה ומטריצה נילפוטנטית השונה מ 0. (13 נקודות)

3. אין קשר בין הסעיפים.

(א) תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצה שכל מקדמיה ממשיים המקיימת  $A^t = -A$ . יהיו

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  ע'ע שונים של  $A$ .

i. הוכיחו  $\lambda$  מדומה טהור. (כלומר שקיים  $b \in \mathbb{R}$  כך ש  $\lambda = bi$ ). (7 נק)

ii. הוכיחו כי אם  $v$  ו'ע של  $\lambda$  ו'ע של  $\mu$ , אז  $\langle v, u \rangle = 0$  ביחס למ'פ

הסטנדרטית. (6 נק)

(ב) יהי  $V$  ממד  $n$  ויהיו  $U, W \subseteq V$  תתי מרחבים שלו שניהם מממד  $m$ .  
 נתון שקיים  $u \in U$  כך ש  $u \in W^\perp$ .  
 הוכיחו כי קיים  $w \in W$  כך ש  $w \in U^\perp$ .  
 (רמז: הראו תחילה כי  $(W + U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$ ). (13 נק)

4. הוכח/הפרד: יש לספק לכל סעיף הוכחה/הפרכה (6 נק לכל סעיף)

- (א) תהינה  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . יתכן של  $A, B$  אותו פ'א אך רק אחת מהן הפיכה.  
 (ב) תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  אוניטרית. אזי,  $2A$  נורמלית.  
 (ג) יהי  $V$  ממד  $n$  מעל  $\mathbb{C}$ , ויהי  $U \subseteq V$  ת'מ שלו. יהי  $v \in V$  ונסמן את ההיטל שלו על  $U$  ב- $p$ . אזי  $v = p \iff (v - p) \perp p$   
 (ד) תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . אם  $v$  הוא ו'ע של  $A$  אזי  $v$  הוא גם ו'ע של  $A^2$ .  
 (ה) תהינה  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצות בעלות אותו פ'א, אותו פ'מ ואותה דטרמיננטה. אזי  $A, B$  דומות.  
 (ו) תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  צמודה לעצמה, אזי  $A$  אוניטרית.

בהצלחה!!!