מבוא לטופולוגיה – תרגיל 8 (פתרון)

<u>תזכורת. קבוצת קנטור</u>

<u>סימונים.</u>

יהיו $a,b \in \mathbb{R}$, $I=[a,b]$. נסמן: $l(I)=[a,a+\frac{1}{3}(b-a)]$

$r(I)=[a+\frac{1}{3}(b-a),a+\frac{2}{3}(b-a)]$

<u>נבנה באינדוקציה סדרת תת-קבוצות</u> ב- $\mathbb{R}$, כלומר:

לכל $n \geq 0$ נבנה 2^n קטעים סגורים I_i^n ותת-קבוצה $K_n \subset \mathbb{R}$ כך ש-

$$\boldsymbol{K_n=\bigcupdot_{i=1}^{2^n} I_i^n}$$

<u>כאשר:</u>

<u>בסיס</u> $(n=0)$: $K_0=I_1^0=[0,1]$

<u>שלב לדוגמה</u> $(n=1)$: $K_1=I_1^1 \cupdot I_2^1$; $I_1^1=l(I_1^0),\ I_2^1=r(I_1^0)$

<u>צעד האינדוקציה.</u> יהיו ל-$n \geq 0$ בנוים קטעים סגורים I_i^n $(1 \leq i \leq 2^n)$ ותת-קבוצה $K_n \subset \mathbb{R}$ כך ש-

$$\boldsymbol{K_n=\bigcupdot_{i=1}^{2^n} I_i^n}$$

<u>אזי נסמן לכל i:</u> $\boldsymbol{I_{2i-1}^{n+1}=l(I_i^n),\quad I_{2i}^{n+1}=r(I_i^n)}$

ונגדיר:

$$\boldsymbol{K_{n+1}=\bigcupdot_{i=1}^{2^{n+1}} I_i^{n+1}}$$

(סוף בניה)==

קל לראות ש- $\boldsymbol{K_0 \supset K_1 \supset \cdots}$.

<u>הגדרה.</u> *קבוצת קנטור* זה החיתוך:

$$\boldsymbol{K=\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n}$$

נסמן ב-$length(\boldsymbol{I})$ האורך של הקטע $\boldsymbol{I}$.

נסמן ב-$L_\Sigma(K_n)$ את סכום אורכי הקטעים $\boldsymbol{I_i^n}$ המוכלים ב-K_n.

<u>ראינו בכיתה:</u>

$$length(\boldsymbol{I_i^n}) = \frac{1}{3^n}$$

$$L_\Sigma(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

<u>הוכחנו בכיתה את התכונות:</u>

א) $K \neq \emptyset$

ב) K קבוצה סגורה

ג) K קבוצה קומפקטית.

ד) K אינה מכילה שום קטע.

<u>שאלה 1</u>

<u>הוכיכו</u> תכונות הבאות של קבוצת קנטור:

ה) K^c צפוף ב-$[0,1]$ (המשלים ביחס למרחב $[0,1]$)

ו) $K^\circ = \emptyset$ (הפנים ביחס למרחב $[0,1]$)

ז) רכיב קשירות וקשירות מסילתית של K הוא נקודון.

<u>הוכחה:</u>

ה) מספיק להוכיח שכל קבוצה U פתוחה ב-$[0,1]$ ולא ריקה נחתכת עם K^c. אבל U פתוחה ב-$[0,1]$ מכילה יחד עם כל נקודה x_0 כדור $B_{[0,1]}\,(x_0, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ שזה או קטע פתוח ב-$\mathbb{R}$ $(x_0 - \varepsilon, x_0 - \varepsilon)$ או קטע $[0, \varepsilon)$, או קטע $(1 - \varepsilon, 1]$ חצי פתוחים ב-$\mathbb{R}$. בכל שלושת המקרים $B_{[0,1]}\,(x_0, \varepsilon)$ הוא קטע ולכן לפי ד) מכיל נקודות שהן לא ב-K ,

כלומר $B_{[0,1]}\ (x_0,\varepsilon)\cap K^c\neq\emptyset \Leftarrow U\cap K^c\neq\emptyset$, מש"ל.

ו) נניח – בשלילה – ש-$x_0\in K^\circ$. אזי כיוון ש-K° קבוצה פתוחה ב-$[0,1]$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B_{[0,1]}\ (x_0,\varepsilon)\subseteq K^\circ$ אבל כיוון ש-$K^\circ\subseteq K$, אז $B_{[0,1]}\ (x_0,\varepsilon)\subseteq K$.
ראינו ב-ה) שלכדור כזה מתקיים: $B_{[0,1]}\ (x_0,\varepsilon)\cap K^c\neq\emptyset$. סתירה.

ז) נוכיח ששתי נקודות שונות לא יכולות להיות באותו רכיב קשירות של K. נניח בשלילה ש-$x,y\in S$ ו- $x<y$ כאשר S רכיב קשחרות. לפי ד) $(x,y)\cap K^c\neq\emptyset$, כלומר קיימת נקודה $a\notin K$ כך ש-$x<a<y$. לכן $x\in[0,a)\cap S$ ו-$y\in(a,1]\cap S$, <u>שסותר</u> לקשורות של S. הוכחנו שכל רכיב קשירות הוא נקודון.אבל פרוק לכיבי קשירות מסילתית הוא עידון של פירוק לכיבי קשירות (ההאצאה האחרונה). אזי כל רכיב קשירות מסילתית הוא גם נקודון.

<u>שאלה 2</u>

<u>הגדרה 1.</u> קטע $[a,b]$ ב-$\mathbb{R}^n$ זאת קבוצה:

$$[a,b]=\{a+t(b-a)|t\in[0,1]\}\subset\mathbb{R}^n$$

או בקואורדינטות:

$$[a,b]=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_i=a_i+t(b_i-a_i),1\leq i\leq n\}$$

הגדרה 2 הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *קמורה* אם :

$$x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subseteq A$$

הוכיחו שכל קבוצה קמורה ב-$\mathbb{R}^n$ קשירה מסילתית.

הוכיחה.

תהי A קמורה. לכל שתי נקודות $x, y \in A$ נגדיר פונקציה :
$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\varphi(t) = x + t(y - x)$ לכל $t \in [0,1]$. היא רציפה כפונקציה לינארית ו-$\varphi([0,1]) \subseteq A$ כי A קמורה. בצמצום הטווח של φ נקבל מסילה ב-A.

שאלה 3

הגדרה 3. הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *תחום כוכבי* ב-$\mathbb{R}^n$ (*עם המרכז בנקודה* $o \in A$) אם לכל $x \in A$ מתקיים $[o, x] \subseteq A$.

הוכיחו שכל תחום כוכבי ב-$\mathbb{R}^n$ הוא קבוצה

הוכיחה.

יהיו $x, y \in A$. בדיוק כמו בשאלה 2 נבנה מסילות מ-o ל-x

ומ-o ל-y : הן קיימות לפי התנאי. לאחר מכן נקח המסילה ההפוחה לראשונה (ההרצאה) (מ-x ל-o) ונשרשר אותה עם המסילה השניה (ההרצאה). השירשור יחבר הנקודה x עם הנקודה y. אז הוכח ש-A קשירה מסילתית.