

פתרון אלגברה לינארית תשפ"ה

סמסטר ב מועד א

י"ח בתמוז ה'תשפ"ה, 14/07/2025

הוראות

- מרצים: אריאל ויצמן ותומר באואר.
- מתרגל: גל כהן.
- יש לענות על כל שאלות הבחינה. סך הניקוד הוא 104 נק', לא ניתן לקבל ציון מעל 100.
- אין חומר עזר, מותר מחשבון.
- זמן הבחינה: 3 שעות.
- המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
- יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

שאלות

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$ (5 נק' לכל סעיף):

i. $N(A)$

ii. $C(A)$

iii. $N(A) + C(A)$

iv. $N(A) \cap C(A)$

פתרון:

נתחיל לדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$N(A) = sp \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C(A) = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ניזכר שמתקיים:

$$N(A) + C(A) = sp \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

וצריך לבדוק אם זה בסיס, כלומר אם זה בתל:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שאין חופשי ולכן הם בתל, ולכן בסיס. כעת:

$$\dim(N(A) + C(A)) = \dim N(A) + \dim C(A) - \dim(N(A) \cap C(A))$$

נציב את המספרים שקיבלנו:

$$3 = 1 + 2 - \dim(N(A) \cap C(A))$$

ולכן

$$\dim(N(A) \cap C(A)) = 0$$

ולכן בסיס לחיתוך הוא $\emptyset$.

(ב) (10 נק') האם A הפיכה?

אם כן מצאו את ההופכית A^{-1} , אם לא מצאו מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש $AB = 0$.

פתרון:

מכיון שבסיום דירוג A לא קיבלנו את מטריצת היחידה, נקבל ש A לא הפיכה. מכיון ש

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A)$$

נקבל

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן, עבור

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$A \cdot B = 0$$

שהרי לכל $1 \leq j \leq 3$ מתקיים:

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

(א) קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

$$T(1+x) = T(1-x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.}$$

$$1 \in \ker T \quad \text{ii.}$$

הפרכה:

נשים לב:

$$1+x+1-x=2$$

ולכן

$$T(2) = T(1+x+1-x) = T(1+x) + T(1-x) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ומכיון ש T העתקה לינארית נקבל:

$$T(2) = 2T(1)$$

ולכן

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{קיבלנו שאם } T(1+x) = T(1-x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ אז}$$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $1 \notin \ker T$. לכן שני התנאים לא יכולים להתקיים יחד.

(ב) קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ חח"ע.

הוכחה:

נגדיר

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx$$

ונקבל

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = 0$$

ולכן $\ker T = \{0\}$ ולכן היא חח"ע.

(ג) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים: אם $A^2 + A$ הפיכה אז A הפיכה.

הוכחה:

מהנתון נקבל $A(A + I)$ הפיכה, ולכן כל אחת מהמוכפלות הפיכות, ולכן A הפיכה.

(ד) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מתקיים: המטריצה $AA^t \in \mathbb{R}^{m \times m}$ לכסינה.

הוכחה:

נראה שהיא סימטרית, ולכן היא לכסינה אורתוגונלית ובפרט לכסינה:

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

(ה) הקבוצה

$$S = \{a + bx + (a + b)^2 x^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$$

היא תת־מרחב של $\mathbb{R}_2[x]$.

הפרכה:

נראה שאין סגירות לכפל בסקלאר:

$$1 + x + 4x^2 = 1 + 1 \cdot x + (1 + 1)^2 x^2 \in S$$

$$2 \cdot (1 + x + 4x^2) = 2 + 2x + 8x^2 \notin S$$

מכיון ש

$$(2 + 2)^2 = 16 \neq 8$$

3. (12 נק') עבור אילו ערכים של $a, b \in \mathbb{R}$ המטריצה A הבאה לכסינה?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & a & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נחשב פולינום אופייני של A :

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \det \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & a & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$\det \begin{pmatrix} x-1 & -b & -b^2 \\ 0 & x-a & -2ab \\ 0 & 0 & x-a^2 \end{pmatrix}$$

זו משולשית ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון ונקבל:

$$p_A(x) = (x-1)(x-a)(x-a^2)$$

מה שאומר שהערכים העצמיים הם $1, a, a^2$. עבור $a \notin \{0, \pm 1\}$ נקבל שלושה ע"ע שונים ולכן לכסינה לכל b .

עבור $a = 0$ נקבל 1 ע"ע עם $a(1) = 1$ ולכן גם $g(1) = 1$, ובנוסף 0 ע"ע עם $a(0) = 2$:

$$g(0) = \dim V_0 = \dim N(0I - A) = \dim N(-A)$$

$$= \dim(A) = \dim N \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

ולכן לכסינה לכל b .

עבור $a = 1$ נקבל 1 ע"ע עם $a(1) = 3$ ובנוסף:

$$g(1) = \dim N(1 \cdot I - A) = \dim N \begin{pmatrix} 0 & -b & -b^2 \\ 0 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & b = 0 \\ 1 & b \neq 0 \end{cases}$$

ולכן לכסינה אמ"ם $b = 0$.

עבור $a = -1$ נקבל -1 ע"ע עם $a(-1) = 1$ ולכן גם $g(-1) = 1$, ובנוסף 1 ע"ע עם $a(1) = 2$ ועם

$$g(1) = \dim N(I - A) = \dim N \begin{pmatrix} 0 & -b & -b^2 \\ 0 & 2 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 + \frac{b}{2}R_2 \rightarrow R_1 \dim N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

ולכן לכסינה לכל b .

4. נתונה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב העצמי של ערך עצמי 0, V_0 .
 (ב) (12 נק') הסבירו למה קיימות מטריצה P אורתוגונלית (כלומר, שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^4$ לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית) ומטריצה אלכסונית D כך ש

$$P^{-1}AP = D$$

ומצאו את P, D .

פתרון:

המטריצה סימטרית ולכן לכסינה אורתוגונלית. נפתור את כל השאלה בבת אחת. נחשב פולינום אופייני:

$$p_A(x) = \left| \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \right|$$

נסכום את כל העמודות לראשונה ונקבל:

$$\left| \begin{pmatrix} x-2 & 0 & -1 & 0 \\ x-2 & x-1 & 0 & -1 \\ x-2 & 0 & x-1 & 0 \\ x-2 & -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-2) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \right|$$

נחסר את מכל השורות את הראשונה ונקבל

$$(x-2) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-2) \left| \begin{pmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ -1 & 1 & x-1 \end{pmatrix} \right|$$

נפתח לפי שורה אמצעית ונקבל:

$$(x-2)x \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)x((x-1)^2 - 1) =$$

$$x(x-2)(x^2 - 2x) = x^2(x-2)^2$$

נמצא מרחבים עצמיים ונעשה עליהם גראם שמידט וכך נענה על כל השאלה בבת אחת: מה שמקבלים זה:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

וכמובן P אורתוגונלית כי עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^4$.

בהצלחה!