

אינפי 1 - תרגיל בחירה 4 (הקבוצה של ניר) - תרגיל מסכם

תתי סדרות, סנדוויץ' וגבולות חלקיים

9 בנובמבר 2015

הנחיות כלליות

- הגשת התרגיל עד 21.11.15 בשעה 23:59 לתיבה שלי (כזכור תא 48), במייל או בשעת התרגול.
- לשאלות, ייעוץ והכוונה ניתן לפנות לכתובת nir.schwartz1@biu.ac.il.

הנחיות לתרגיל

לתרגיל זה הקצבתי שבוע וחצי אולם **משקלו כתרגיל אחד בודד**.

- בחלק הראשון של הטענה המרכזית ההוכחה לא אמורה לקחת יותר מעמוד
 - בחלק השני של הטענה המרכזית לא יותר ממשפט.
- אם אתם רואים שאינכם מצליחים את התרגיל, אל פחד! אבקש שתזכרו את הטענה המרכזית ככלי לבדיקת תוצאות של גבולות במבחן.

הערה

הכלי שנראה השבוע הוא כלי עוצמתי לחישוב גבולות סדרות. **בשום פנים ואופן אין להשתמש בכלי זה במבחן במקום השיטות שבהרצאה** (אא"כ אתם לא רוצים שהסעיף ינוקד). בבוחן אתן 60% מערך הסעיף על כל שימוש שכנ"ל.

4 גבולות חלקיים, עליונים ותחתונים

הקדמה

בתרגיל הקודם ראינו שאם $a_n \rightarrow L$ אז הדבר נכון גם לסדרת הממוצעים החשבוניים,

$$b_k = \frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k} \rightarrow L$$

וכן ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ' שמחילים על אי"ש הממוצעים זה נכון גם לסדרת הממוצעים ההנדסיים,

$$c_m = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m a_j} \rightarrow L$$

אולם, הגבול L לא תמיד קיים (אפילו לא במובן הרחב!). מה נעשה? נתבונן בתתי סדרות $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסות לקבוצת גבולות $\{L_k\}$. נסמן

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \max_k \{L_k\}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \min_k \{L_k\}$$

כלומר הגבול החלקי המקסימלי והמינימלי בהתאמה.

התרגיל

תהי סידרה חיובית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

1. הוכיחו שמתקיים

(א)

$$\overline{\lim}_m \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m a_j} \geq \overline{\lim}_n a_n$$

(ב)

$$\underline{\lim}_m \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m a_j} \leq \underline{\lim}_n a_n$$

2. הסיקו את ההקדמה מעלה.

הערה

תשימו לב אגב שעבור סידרה חיובית שכנ"ל לא בהכרח קיים הגבול של הממוצע החשבוני.¹

GOOD LUCK! 😊

¹לצורך העניין קחו את $a_n = \frac{n}{2} - (-1)^n \frac{n}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ n & n = 2k + 1 \end{cases}$ ובדקו ש $\limsup a_n = 1 > 0 = \liminf a_n$.