פתרון תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. נשתמש במשפט רושה ונגדיר $f(z) = -z$ אז לפי הנתון על עיגול היחידה

$$|g(z)| \leq 1 = |-z|$$

ולכן מספר האפסים של $-z$ בתוך כדור היחידה הוא כמספר האפסים של $g(z) - z$ דהיינו 1.

2. נניח בשלילה שלכל נקודה z עם $|z| = 1$ מתקיים $|p(z)| < 1$. ונגדיר $f(z) = -z^n$ אז מתקיים שעל מעגל היחידה

$$|g(z)| < |f(z)|$$

ולכן מספר האפסים של $-z^n$ בתוך מעגל היחידה כמספר האפסים של

$$g(z) + f(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

אבל ל $-z^n$ יש n אפסים בתוך מעגל היחידה ול $g(z) + f(z)$ יש לכל היותר $n-1$ אפסים בכל $\mathbb{C}$ (כי הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$) וזאת סתירה.

3. לפי עקרון הארגומנט

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = 3 + 4 - 5 = 2$$

שימו לב ש $z = 5$ מחוץ לתחום המדובר.

4. f העתקת מביוס כלומר

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

היות ש $f(0) = 0$ ברור כי $b = 0$ ולכן

$$f(z) = \frac{az}{cz + d}$$

היות ש f מעבירה את מעגל היחידה על עצמו, $1 = |f(-i)| = |f(-1)| = |f(1)|$ כלומר

$$|\frac{a}{d+c}| = |\frac{a}{d-c}| = |\frac{a}{d-ic}|$$

כלומר

$$|a| = |d + c| = |d - c| = |d - ic|$$

כלומר המרחק של d משלושת הנקודות $c, -c, ic$ שווה. נניח ש $c \neq 0$ אז אלה שלוש נקודות שונות. הנקודה היחידה שנמצאת באותו מרחק מ3 נקודות שונות היא מרכז המעגל שעובר דרך 3 הנקודות האלה. במקרה שלנו המרכז הזה הוא $d = 0$. אבל לא

ייתכן ש $d = 0$ כי f העתקת מביוס וצריך להתקיים $ad - bc \neq 0$. האפשרות היחידה שנותרת היא $c = 0$. כלומר

$$f(z) = \frac{az}{d}$$

שוב, הדרישה ש $|f(1)| = 1$ אומרת לנו ש $|\frac{a}{d}| = 1$ ולכן אפשר לומר ש

$$f(z) = Az$$

כאשר $|A| = 1$ כנדרש.