

לינאריות 2 - מטלה 1 - העתקות לינאריות

תאריך הגשה: 07.03.2019

תרגיל 1. הוכח או הפרך: האם העתקות הבאות הן העתקות לינאריות?

1. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -3y \end{pmatrix}$$

2. $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ y \end{pmatrix}$$

4. תהי $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה הפיכה. תהי $T: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ נגדיר

$$T(A) = B^{-1}AB$$

5. תהי $T: \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$ נגדיר

$$T(p(x)) = p'(x) + p(0)$$

כלומר T מקבל פולינום מדרגה n ומחזירה את נגזרת הפולינום פלוס ערך הפולינום ב-0.

תרגיל 2. תהי T העתקה לינארית הוכיחו ש-

$$1. T(0) = 0$$

$$2. T \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^M \alpha_i T(v_i) \text{ - יש להוכיח פורמלית באינדוקציה!}$$

3. יהיו v_1, \dots, v_n כך ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל הוכח ש- v_1, \dots, v_n גם כן בת"ל

4. יהיו v_1, \dots, v_n בת"ל ו- T ה"ל חח"ע (כמו שהוגדר בבדידה) הוכיחו ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל

תרגיל 3. הסעיפים הבאים מצא את העתקה או הוכח שאינה קיימת

1. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_5[x]$ המקיימת

$$\begin{cases} T \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x + 1 \\ T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \\ T \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

2. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ המקיימת

$$\begin{cases} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x + 1 \\ T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x - x^2 \\ T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x^2 \\ T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = x^3 \end{cases}$$

3. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המקיימת

$$\begin{cases} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

תרגיל 4. מצאו מטריצה A שמקיימת $T(v) = Av$ לכל v עבור העתקות הליניאריות הבאות:

$$1. T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 5z \end{pmatrix}$$

$$2. T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + z \\ 2z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$$

תרגיל 5. האם מצאת כלל מסויים על A מהתרגיל הקודם?

בהצלחה!!