

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 4

1. הראו ש $\sqrt{2}$ הוא ריבוע מעל \mathbb{R} אך אינו ריבוע מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. יהיו $f(x), g(x) \in F[x]$ ונסמן $n = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$. אם קיימים $a_1, \dots, a_{n+1} \in F$ שונים כך ש $f(a_1) = g(a_1), \dots, f(a_{n+1}) = g(a_{n+1})$ אזי $f(x) = g(x)$. הסיקו שאם שני פולינומים מזדהים כפונקציות על שדה אינסופי, אזי הם שווים כפולינומים.
3. כתבו במפורש את האוטומורפיזמים של $F(\sqrt[3]{2})$ מעל F (בדקו קודם כמה אוט' יש) כאשר
 - א. $F = \mathbb{Q}(\rho_3)$
 - ב. $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
4. הראו שלפולינום המינימלי של $\rho_3 + \sqrt[3]{5}$ יש 6 שורשים שונים מעל \mathbb{Q} בעזרת חבורת גלואה $Gal(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 5$. הסיקו $E = \mathbb{Q}(\rho_3 + \sqrt[3]{5})$.
5. בחרו בסיס של E/\mathbb{Q} מהשאלה הקודמת. הציגו את ההעתקה הלינארית $T(x) = (\rho_3 + \sqrt[3]{5})x$ כמטריצה בעזרת הבסיס. מצאו את הפולינום האפייני של המטריצה. הסיקו מ 4 שזהו הפולינום המינימלי של $\rho_3 + \sqrt[3]{5}$.
6. יהי E/K שדה פיצול של פולינום $f(x) \in F[x]$ שכל שורשיו שונים. אם $Gal(E/K)$ פועלת טרנזיטיבית על שורשי $f(x)$ אזי $f(x)$ אי-פריק מעל F .