

בחינה בקורס חשבון אינפיניטסימלי 3

המרצים: ניר לב, יורם לוזון, אנדריי לרנר

משך הבחינה: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
יש לענות על ארבע מתוך חמש שאלות.
משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. $E \subset \mathbb{R}^n$ תהי

א. הגדירו את השפה ∂E של הקבוצה E .

ב. הוכיחו כי ∂E היא קבוצה סגורה.

ג. הראו כי ∂E היא קבוצת נקודות האי-רציפות של הפונקציה

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

2. מצאו את הנקודה הקרובה ביותר ואת הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית על האליפסה המתקבלת על-ידי חיתוך של הגליל $x^2 + y^2 = 1$ עם המישור $x + y + z = 1$.

3. חשבו את נפח הגוף ב- \mathbb{R}^3 אשר נמצא מעל הפרבולואיד $z = a(x^2 + y^2)$ ומתחת למישור $z = h$ (כאשר $h > 0$).

4. חשבו

$$\iint_E e^{x/y} dx dy$$

כאשר $E \subset \mathbb{R}^2$ הוא התחום המוגבל על-ידי הישרים $y = 1, x = 0$ והעקום $y = \sqrt{x}$.

5. תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה מדידה ז'ורדן וקשירה מסילתית, ותהי $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחסומה. הוכיחו כי קיים $\xi \in \Omega$ כך ש-

$$\int_{\Omega} f(x) dx = f(\xi) \text{vol}(\Omega)$$

(כאשר $\text{vol}(\Omega)$ הוא הנפח של Ω).

בהצלחה!