פתרון תרגיל 8

1. א. נפתח את $f(z)=ze^{z^2-2z}$ סביב $z=1$.

$$f(z)=ze^{z^2-2z}=(z-1+1)e^{-1}e^{z^2-2z+1}=e^{-1}\left((z-1)+1\right)e^{(z-1)^2}=$$
$$e^{-1}\left((z-1)+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{n!}=e^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n+1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{n!}\right).$$

ב. נפתח את $f(z)=\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)e^z$ סביב $z=0$.

$$f(z)=\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)e^z=\left(\sin z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos z\right)e^z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin z-\cos z)e^z=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\right)e^z=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left((-i-1)e^{iz}+(i-1)e^{-iz}\right)e^z=$$
$$-\frac{i+1}{2\sqrt{2}}e^{(1+i)z}+\frac{i-1}{2\sqrt{2}}e^{(1-i)z}=-\frac{i+1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!}+\frac{i-1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}.$$

ג. נפתח את $f(z)=\frac{z}{1-z^2}$ סביב $z=0$.

$$f(z)=\frac{z}{1-z^2}=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)=\frac{z}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)z^{n+1}$$

וכיוון של- f יש סינגולאריות בנקודות $z=\pm1$ והמרחק של $z=0$ מכל אחת מנקודות אלו שווה ל- 1 נובע שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא 1.

נפתח את $f\left(z\right)=\dfrac{z}{1-z^2}$ סביב $z=i$.

$$f\left(z\right)=\frac{z}{1-z^2}=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{1-i-\left(z-i\right)}+\frac{1}{1+i+\left(z-i\right)}\right)=$$

$$\frac{z-i+i}{2\left(1-i\right)}\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-i}{1-i}\right)}+\frac{z-i+i}{2\left(1+i\right)}\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-i}{1+i}\right)}=\frac{z-i+i}{2\left(1-i\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n+\frac{z-i+i}{2\left(1+i\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n=$$

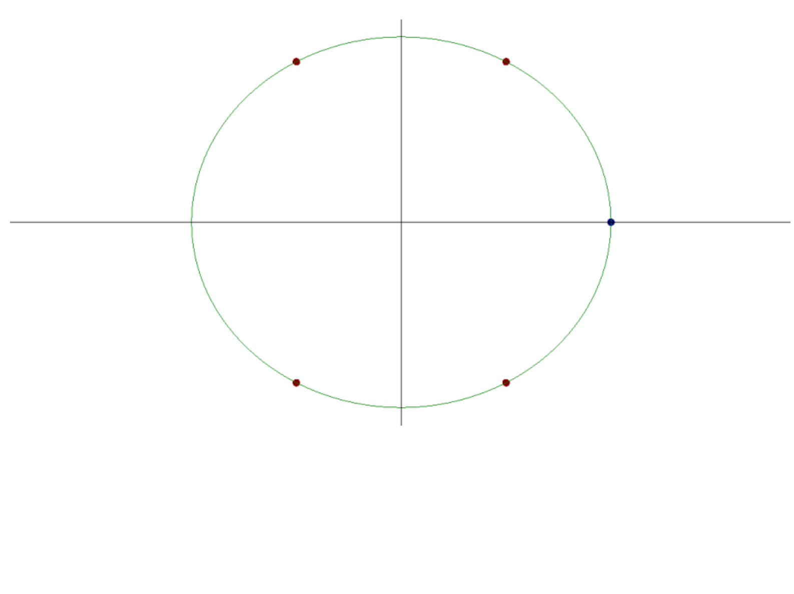
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^{n+1}+\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-i\right)^n}{\left(1-i\right)^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^{n+1}+\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-i\right)^n}{\left(1+i\right)^{n+1}}.$$

רדיוס ההתכנסות של הטור שווה למרחק בין $z=i$ לבין כל אחת מהנקודות $z=\pm1$, כלומר רדיוס ההתכנסות שווה לשורש של 2.

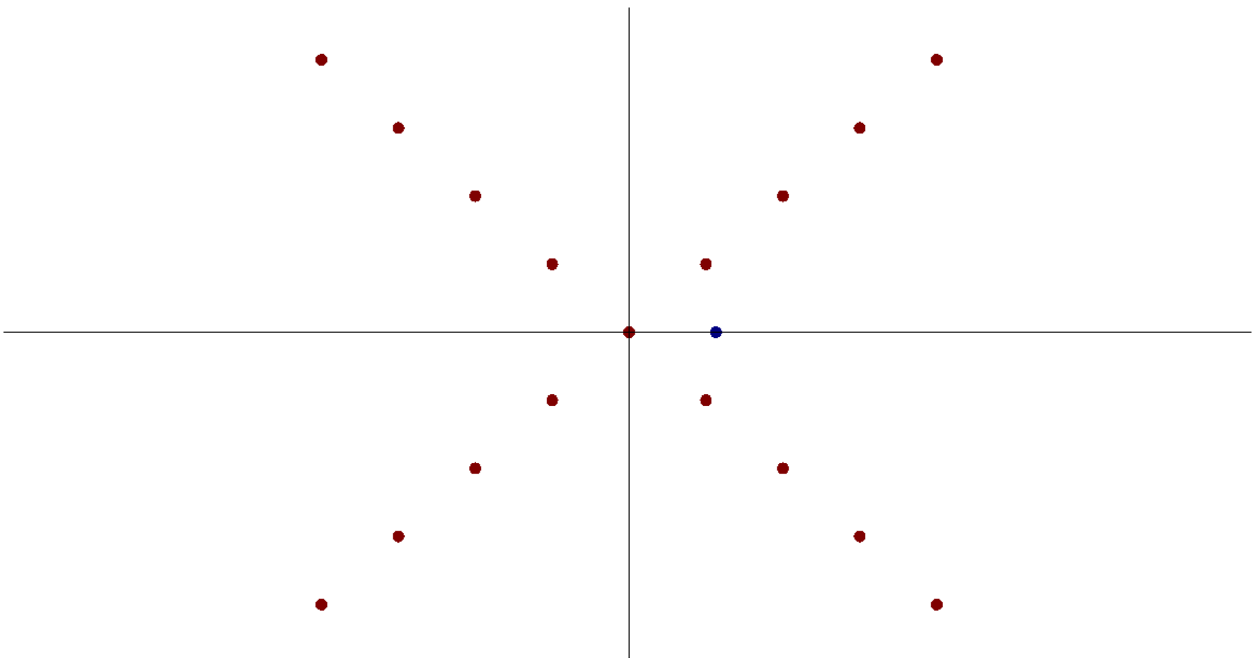
2. א. נמצא את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של $f\left(z\right)=\dfrac{1}{1+z^2+z^4}$ סביב $z=1$. מנוסחא לסדרה הנדסית נקבל ש- $f\left(z\right)=\dfrac{1-z^2}{1-z^6}$. לכן נקודות הסינגולאריות של f הן הנקודות z המקיימות $1-z^6=0$ חוץ מהנקודות $z=\pm1$ כי גם המונה $1-z^2$ מתאפס בנקודות אלו. כלומר נקודות הסינגולאריות של f הן

$$z=e^{\frac{2\pi ik}{6}},k=1,2,\ k=3,4.$$

מהאיור אפשר לראות שהנקודות הסינגולאריות הקרובות ביותר ל-$z=1$ הן $e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$ וקל לבדוק שהמרחק בין נקודות אלו שווה ל-1 ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 1.



ב. נמצא את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של $f(z)=\frac{1}{e^{z^2}-1}$ סביב $z=2$. הנקודות שבהן ל-f יש סינגולאריות הן הנקודות המקיימות $e^{z^2}-1=0$, כלומר הנקודות שהמקיימות $z^2=2\pi ki$ כאשר k שלם. אם k אי שלילי אז הפתרון הוא $z=\pm\sqrt{\pi k}\left(1+i\right)$ ואם k שלילי אז $z=\pm\sqrt{\pi|k|}\left(1-i\right)$. מהאיור אפשר לראות שהנקודות $z=\sqrt{\pi}\left(1\pm i\right)$ הן הנקודות הסינגולאריות הקרובות ביותר ל-$z=2$, לכן רדיוס ההתכנסות נתון לפי $R=\left|2-\sqrt{\pi}\left(1+i\right)\right|=\left|\left(2-\sqrt{\pi}\right)-i\sqrt{\pi}\right|=\sqrt{\left(2-\sqrt{\pi}\right)^2+\sqrt{\pi}^2}=\sqrt{4-4\sqrt{\pi}+2\pi}$



3. א. כיוון שלפי הנתון f מקבלת ערכים ממשיים על הציר הממשי, ממה שהוכחנו בכיתה נובע ש-

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ כאשר a_n הם מספרים ממשיים. לכן

$$f(iy)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(iy\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n}y^{2n}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}y^{2n+1}.$$

על פי הנתון, $f(iy)$ הוא מספרמדומה טהור ולכן לכל $y\in\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n}y^{2n}=0$. לכן $a_{2n}=0$ לכל n

טבעי או אפס. ולכן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$. מכאן נובע כי $f(-z)=-f(z)$, כלומר f פונקציה אי זוגית.

ב. f פונקציה שלמה המקיימת $\left|f\left(z\right)\right|\le\left|z\right|^2$ לכל z מרוכב. נחשב את המקדם a_n בפיתוח של f לטור טיילור

סביב $z=0$. לפי נוסחאת קושי $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{f\left(z\right)}{z^{n+1}}dz$ כאשר האינטגרל מחושב על המעגל $\left|z\right|=r$ כאשר

$r>0$ (ואז המעגל מקיף את הנקודה $z=0$). כעת נשתמש בקאורדינטות קוטביות $z=re^{i\theta}$, $dz=ire^{i\theta}$,

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}re^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{r^n}e^{-in\theta}d\theta .$$

כיוון ש- $\left|f\left(z\right)\right|\le\left|z\right|^2$ נובע ש- $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\le r^2$ ולכן

$$\left|a_n\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{r^n}e^{-in\theta}\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\left|r^n\right|}d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2}{r^n}d\theta=r^{-n+2}.$$

לכן אם נשאיף את r לאינסוף נקבל ש- $\left|a_n\right|\le r^{-n+2}\to 0$ אם $n\ge 3$.

4. א. נתונה הפונקציה $f\left(z\right)=\frac{\left(e^z-1-z-\frac{z^2}{2}\right)^8}{\left(z^4+z^5+...+z^{18}\right)\left(\sin^2\left(z^8\right)\right)}$, נמצא את הסדר של אפס של f

בנקודה $z=0$. נמצא קודם את הסדר של האפס של המונה. בפיתוח טיילור נקבל

$$e^z-1-z-\frac{z^2}{2}=\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+...\right)-1-z-\frac{z^2}{2}=\frac{z^3}{6}+...$$

לכן בפיתוח טיילור המקדם הראשון ששונה מאפס שייך לחזקה השלישית לכן סדר של אפס של $e^z-1-z-\frac{z^2}{2}$

הוא 3. כיוון שבמונה ביטוי זה מועלה בשמינית נובע שלמונה יש אפס מסדר $3\cdot 8=24$. נשים לב שאת הפונקציה

$g(z)=z^4+z^5+...+z^{18}$ ניתן לרשום בצורה $g(z)=z^4\left(1+z+...+z^{14}\right)$, כלומר ל- g יש את הצורה $g(z)=z^4g_0(z)$ כאשר $g_0(0)\neq 0$ ולכן ל- g יש אפס מסדר 4. לפונקציה $h(z)=\sin\left(z^8\right)$ יש פיתוח טיילור סביב $z=0$ הנתון לפי

$$h(z)=\sin\left(z^8\right)=z^8-\frac{z^{24}}{6}+...$$

לכן בפיתוח טיילור המקדם הראשון ששונה מאפס שייך לחזקה השמינית ולכן ל- h יש אפס מסדר שמנה. לכן ל- $\sin^2\left(z^8\right)$ יש אפס מסדר $2\cdot 8=16$. לכן לפונקציה f יש אפס מסדר $24-4-16=4$.

ב. נתונה הפונקציה $f(z)=\dfrac{\left(e^{e^{z-1}-z}-1\right)^3}{(z-1)^5}$, נמצא את הסדר של אפס של f בנקודה $z=1$. נסמן $g(z)=e^{e^{z-1}-z}-1$. אם נציב $z=1$ נקבל $g(1)=e^{e^0-1}-1=e^{1-1}-1=e^0-1=1-1=0$.

$g'(z)=\left(e^{z-1}-1\right)e^{e^{z-1}-z}$. אם נציב $z=1$ נקבל $g'(1)=\left(e^{1-1}-1\right)e^{e^{1-1}-1}=(1-1)e^0=0$.

$g''(z)=e^{z-1}e^{e^{z-1}-z}+\left(e^{z-1}-1\right)^2e^{e^{z-1}-z}$ ואז $g''(1)=1\neq 0$. לכן ל- g יש אפס מסדר 2. כיוון ש- g מועלת בשלישית במונה נובע שלמונה יש אפס מסדר $2\cdot 3=6$. קל לראות של- $(z-1)^5$ יש אפס מסדר 5. לכן ל- f יש אפס מסדר $6-5=1$.