בוחן לינארית קיץ תשעה

4/8/2015 י"ט באב

מתרגלים: עדי בן צבי, אחיה בר־און, שי גול, שירה גילת ותמר נחשוני.

- ענו על כל השאלות.
- **כיתבו כל תשובה בדף של השאלה. על כל דף רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד: $8 \cdot 10 + 2 \cdot 15 = 110$ (שמונה שאלות של 10 נק' ו ־ 2 שאלות של 15 נק'.)
- מבנה הבחינה:
  - שאלה 1: תתי מרחבים וקטורים (2 סעיפים)
  - שאלה 2: מכילה 3 סעיפים
  - שאלה 3: מכילה 4 סעיפי הוכח או הפרך

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

שם המרצה______________ שם המתרגל______________

1. תתי מרחבים וקטורים

(א) (10 נק') $V = \mathbb{R}^{4\times 4}$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את תתי המרחבים

$W_1 = \{A \in V \,|\, \forall i > j :\ A_{i,j} = 0\}$ המשולשיות העליונות ו

$W_2 = \{A \in V \,|\, \forall j > i :\ A_{i,j} = 0\}$ המשולשיות התחתונות

מצא מהו החיתוך $W_1 \cap W_2$.

פתרון: החיתוך הוא המטריצות האלכסוניות. ובסיס להם הוא הקבוצה $\{e_{1,1}, e_{2,2}, e_{3,3}, e_{44}\}$ כאשר $e_{i,i}$ היא מטריצה שכולה אפסים פרט לכניסה i,i ששוה 1 .

(ב) (10 נק' לסעיף) נגדיר $V = \mathbb{C}^3$ ותת קבוצה $W = \{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in V \,|\, z_1 + \overline{z}_2 = z_3\}$ (כאשר $\overline{z}_2$ פירושו הצמוד של z_2) האם W הוא תת מרחב של V כאשר

i. V הוא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$

פתרון: זה לא תת מרחב כי

$$v = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \in W,\ \alpha = -i \in \mathbb{C}$$

והכפל ביניהם

$$\alpha v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

ii. V הוא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$

פתרון: זה תת מרחב כי

$$W = \{\begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i \end{pmatrix} \in V \,|\, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R},\ \wedge\ \begin{matrix} a_1 + a_2 = a_3 \\ b_1 - b_2 = b_3 \end{matrix}\ \}$$

שזה שקול לפתרון של מערכת הומוגנית $Ax = 0$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 6}$ כלומר

$$W = \{\begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i \end{pmatrix} \in V \,|\, A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

ולכן תת מרחב.

שם ות.ז. ______________________

2. תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. מטריצה הפיכה.

(א) (15 נק') מצא את ההופכית שלה (כלומר מצא את A^{-1}).

פתרון: נדרג את $(A|I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_3\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2\to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_2\to R_2]{\frac{1}{2}R_1\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) (15 נק') נגדיר $\mathbb{R}^3 \ni v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. הוכח כי

$$span\{v_1, v_2\} \oplus sapn\{v_3\} = \mathbb{R}^3$$

פתרון: סכום: לכל $b \in \mathbb{R}^3$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = A^{-1}b$ יקימו

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + (\alpha_3 v_3) = b$$

המחובר הראשון שייך ל $span\{v_1, v_2\}$ והמחובר השני שייך ל $sapn\{v_3\}$

ישר: נניח $v \in span\{v_1, v_2\} \cap sapn\{v_3\}$ אזי קימיים $\alpha_1, \alpha_2\alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v = \alpha_3 v_3$$

נעביר אגף ונקבל $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3 = 0$ כיוון שהוקטורים בת"ל המקדמים שווים 0 ולכן v שווה 0.

*הוקטורים בתל כי $Ax = 0$ גורר ש $x = 0$ כי $x = A^{-1}0$

(ג) (10 נק') נגדיר $\mathbb{R}^{3\times3} \ni B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ מצא מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש

$$C \cdot A^t = B$$

פתרון: מתקיים כי

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, C המבוקשת היא $C = B \cdot (A^t)^{-1}$ ולכן

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

שם ות.ז. ______________________

שם ות.ז. ______________________

3. (10 נקו' לסעיף) הוכח או הפרך :

(א) יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $W, W_1, W_2 \leq V$ תתי מרחבים. הוכח או הפרך:
אם $W + W_1 = W + W_2$ אז $W_1 = W_2$
פתרון: נגדיר $W_1 = W = V = \mathbb{R}^2$ ונגדיר $W_2 = \{0\}$ אזי

$$W + W_1 = W + W_2 = \mathbb{R}^2$$

אבל $W_1 \neq W_2$

(ב) יהיה V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $A, B \subseteq V$ תת קבוצות. הוכח או הפרך:

$$span(A \cup B) = span(A) \cup span(B)$$

פתרון: נגדיר $V = \mathbb{R}^2$ ונגדיר $A = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, B = A = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ אזי $span(A) \cup span(B)$ אינו ת"מ כי איחוד של ת"מ הוא ת"מ אמ"מ אחד מוכל בשני.
מצד שני $span(A \cup B)$ כן ת"מ כי זה $span$של משהוץ בפרט לא מתקיים השיוון בשאלה

(ג) תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה אנטי סימטרית. **הוכח** כי לכל $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ מתקיים

$$v^t A v = 0$$

(רמז: מה גודל המטריצה המתקבלת? איך שיחלוף ישפיע?)
פתרון: נחשב

$$(v^t A v)^t = v^t A^t v = v^t(-A)v = -v^t A v$$

לכן $v^t A v$ אנטי סימטרית. כיוון שהמטריצה היא מגודל 1×1 היא חייבת להיות מטריצת האפס.

(ד) יהיה V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ וקטורים בת"ל. נגדיר $w_1 = v_1$ ולכל $2 \leq i \leq n$ נגדיר $w_i = v_1 + v_i$.
הוכח/הפרך: $w_1, w_2, \ldots, w_n$ גם כן בת"ל
פתרון: יהי $\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = 0$ צ"ל של w-ים שמתאפס. צריך להראות שזהו הצ"ל הטריוואלי.

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i (v_1 + v_i)$$

ובסידור מחדש

$$(\sum_{i=1}^n \alpha_i) v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i = 0$$

כיוון ש $v_1 \ldots v_n$ ב"ל נקבל שכל המקדמים שווים אפס כלומר

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$$

שזה גורר כי

$$\forall i \, \alpha_i = 0$$

שם ות.ז. ______________________

שם ות.ז. ______________________

שם ות.ז. ______________________