

קורס: 83-211-01
מרצה: ש. הורוביץ
ט"ו בשבט תשע"א

מבחן בפונקציות מרוכבות

מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים וחצי. בהצלחה!

1. א. הראו שלמספר z ב- \mathbb{C} , $|z|=1$, אם ורק אם $z=1/\bar{z}$.
ב. נגדיר $f(z) = \frac{1+(2-3i)z+(4+i)z^2}{(4-i)+(2+3i)z+z^2}$. הסתמכו על התוצאה של סעיף א. להוכיח שאם $|z|=1$ אז $|f(z)|=1$.
2. נגדיר $f(z) = \bar{z}^2 e^{2z}$.
א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?
ב. באילו נקודות $f(z)$ אנליטית? (ז.א. שיש להן סביבה שלימה שבה f גזירה).
3. חשבו: $\int_{\gamma} (z^2 - \bar{z}) dz$ כאשר γ מסילה המורכבת מהפרבולה $y = x^2$ מ-0 עד $1+i$ והקטע הישר מ- $1+i$ עד 0.
4. עבור כל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $g_n(z) = z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ו- $\int_{|z|=1} g_n(z) dz$ כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון. (התוצאה תלויה ב- n).
5. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4x + 8} dx$ והצדיקו את תשובתכם.
6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $f(z) = (z+3)^2 e^{3z} + (z+2)^4$ במלבן $R = \{(x, y) : -4 \leq x \leq -1; -1 \leq y \leq 1\}$, והצדיקו את תשובתכם. הדרכה: תחילה הוכיחו ע"פ משפט פיתגורס בלבד שבתוך R $|(z+3)^2| \leq 5$.

