

המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 05 222 - 88 – סמסטר ב' תשע"ט, 03.07.19 מבחן מועד א'
מרצה: מיכאל מגרל מתרגלת: תמר בר-און

הנחיות:

- יש לבחור 4 מתוך 5 שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל שלא בחרתם.
- כל שאלה שווה 25 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

השאלות:

1. א. הוכיחו שמרחב מטרי (\mathbb{Z}, d_5) הוא חסום כליל, לא קשיר ולא קומפקטי.
ב. הוכיחו שהגרף $Gr(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ של פונקציה רציפה $f : X \rightarrow Y$ (בין מרחבים טופולוגיים) הומיאומורפי למרחב X .
2. א. במרחב מטרי $(1, \infty)$ למצוא כיסוי פתוח ללא מספר לבג.
ב. בקו סורגנפראי \mathbb{R}_s חשבו שפה $\partial(A)$ של תת קבוצה הבאה
 $A = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (3, 4) \cup \{\frac{7n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
תזכורת: תת קבוצה U של \mathbb{R} פתוחה בטופולוגית סורגנפראי אם
 $x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 [x, x + \varepsilon) \subseteq U$
3. א. נניח X מרחב טופולוגי האוסדורפי וקומפקטי מקומית. הוכיחו שקיים מרחב קומפקטי האוסדורפי K ושיכון טופולוגי $i : X \rightarrow K$.
ב. במרחב טופולוגי $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ נגדיר יחס שקילות:
 $(x, y, z) \sim (a, b, c)$ אם $x = a, y = b$. תארו מרחב המנה X / \sim .
4. א. משפט ההפרדה: נניח X מרחב האוסדורפי. הוכיחו שלכל זוג של תת קבוצות קומפקטיות זרות ב X יש סביבות זרות.
ב. נניח X הוא מרחב טופולוגי בעל תכונת מנייה שנייה B_2 . הוכיחו שלכל כיסוי פתוח ב X יש תת כיסוי בן מנייה.
5. א. משפט: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.
ב. נניח A_i תת קבוצה סגורה לא ריקה במרחב טופולוגי X_i לכל $i \in I$. הוכיחו שתת קבוצה
 $\prod_{i \in I} A_i$ סגורה במרחב המכפלה $\prod_{i \in I} X_i$.
שאלת בונוס (5 נקודות):
נגדיר תת מרחבים הבאים של המישור
 $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$
 $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 5\}$
הוכיחו או הפריכו: X ו Y הם מרחבים הומיאומורפיים.

בהצלחה !