לינארית 2 תשפ"ד אביב מועד א - פתרון

מרצה: ד"ר עדי בן צבי.

מתרגלים: עידו גולדנברג, עידו פלדמן.

יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 108 נק.

זמן הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.

יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.הוכיחו כי A לכסינה אממ פ"מ שלה מל"ל שונים.(15 נק)

2. נתבונן ב $\mathbb{R}_2[x]$ עם המ"פ הסטנדרטית הבאה:

$$\forall p(x), q(x) \in R_2[x] : < p, q >:= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

(א) מצאו בסיס או"ג עבור $\mathbb{R}_2[x]$. (8 נק)

(ב) מצאו את ההיטל של הווקטור $1 - x^2$ על תת-המרחב $U := sp\{1, x\}$. (5 נק)

3. אין קשר בין בסעיפים הבאים:

(א) תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המקיימת $rankA = 2,\ rank(A - iI) = 4$. מצאו את הפ"מ של A?(12 נק)

(ב) (10 נק) תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו כי כל הע"ע של A^*A הם ממשיים אי-שליליים (כלומר הם $0 \leq$).

4. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לסעיף)

(א) קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $tr(A) = i$.

(ב) יהי Vממ"פ מימד n, ויהי B בסיס סדור של V. אזי G_B (מטריצת גראם לפי B) היא לכסינה.

(ג) יהי Vממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהי U ת"מ שלו. יהי $v \in V$ ונסמן ב p את ההיטל שלו על U. אזי,

$$v \in U^{\perp} \Longleftarrow ||v + p|| = ||v - p||$$

5. תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים (גדולים <u>ממש</u> מ 0).

(א) (10 נק) הוכיחו כי קיימת מטריצה R הפיכה כך ש $M = RR^t$

(ב) (10 נק) תהי M כנ"ל ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש

$C^tMC = I$ וגם C^tAC היא אלכסונית

(ג)

הגדרה. תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים, ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נאמר כי $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא **M-ע"ע** אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ כך ש

$$Av = \lambda Mv$$

v כזה יקרא **M-ו"ע** של A המתאים ל λ.

תהי M כנ"ל (ממשית וסימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים), ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית.

i. (10 נק) הוכיחו שכל ה M-ע"ע של A הם ממשיים.

ii. (7 נק) הוכיחו שקיים בסיס $\mathbb{R}^n$המורכב מ M-ו"ע של A.

בהצלחה!!

שאלה 1: (15 נק) תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו כי A לכסינה אממ פ"מ שלה מל"ל שונים.

פתרון: משפט מההרצאה.

שאלה 2: נתבונן ב $\mathbb{R}_2[x]$ עם המ"פ הסטנדרטית הבאה:

$$\forall p(x), q(x) \in R_2[x] : < p, q >:= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

1. (8 נק) מצאו בסיס או"ג עבור $\mathbb{R}_2[x]$.
2. (5 נק) מצאו את ההיטל של הווקטור $1 - x^2$ על תת-המרחב $U := sp\{1, x\}$.

פתרון:

א. ניקח את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$ (שהוא כמובן $\left\{1, x, x^2\right\}$) ונפעיל גראם-שמידט. נחשב:

$$x - \pi_{\text{sp}\{1\}}(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{||1||^2} \cdot 1 = x - \frac{-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{3} = x$$

$$x^2 - \pi_{\text{sp}\{1,x\}}\left(x^2\right) = x^2 - \frac{\left\langle x^2, 1\right\rangle}{||1||^2} \cdot 1 - \frac{\left\langle x^2, x\right\rangle}{||x||^2} \cdot x = x^2 - \frac{2}{3} - \frac{-1 + 0 + 1}{||x||^2} \cdot x = x^2 - \frac{2}{3}$$

לכן $B = \left\{1, x, x^2 - \frac{2}{3}\right\}$ הוא בסיס או"ג.

ב. נבחין כי $\{1, x\}$ הוא בסיס או"ג ל-U (כי ראינו בסעיף א' שהם מאונכים). לכן, ההיטל לפי הגדרה יוצא:

$$\pi_U\left(1 - x^2\right) = \frac{\left\langle 1 - x^2, 1\right\rangle}{||1||^2} \cdot 1 + \frac{\left\langle 1 - x^2, x\right\rangle}{||x||^2} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 1 + 0 \cdot x = \frac{1}{3}$$

דרך נוספת תהיה להיעזר בלינאריות של ההיטל, ובחישובים מהסעיף הקודם:

$$\pi_U\left(1 - x^2\right) = \pi_U(1) - \pi_U\left(x^2\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

הרי $1 \in U$ לכן $\pi_U(1) = 1$, ואת $\pi_U\left(x^2\right) = \frac{2}{3}$ הראינו בסעיף הקודם.

<u>שאלה 3: אין קשר בין הסעיפים הבאים:</u>

1. (12 נק) תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ המקיימת $rankA = 2,\ rank(A - iI) = 4$. מצאו את הפ"מ של A?

2. (10 נק) תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו כי כל הע"ע של A^*A הם ממשיים אי-שליליים (כלומר הם $0 \le$).

<u>פתרון:</u>

א. כיוון ש-$\text{rank}\,(A - iI) = 4$ מתקבל ממשפט הדרגה ש-$g_i = 1$. בפרט, i הוא ע"ע ולכן $p_A\,(i) = 0$. כיוון ש-$A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, הפ"א הוא עם מקדמים ממשיים גם כן, ולכן $-i$ ע"ע גם כן (ולכן $g_{-i} \ge 1$).

עוד מתקיים ש-$\text{rank}A = 2$ ולכן $g_0 = 3$. כיוון שכרגע סכום הריבויים הגאומטריים הוא לפחות 5, מתקבל כי $g_{-i} = 1$. לכן, A לכסינה (מעל $\mathbb{C}$) אזי הפ"מ מל"ל שונים. מתקבל:

$$m_A\,(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 + 1\right)$$

כי הע"ע הם $0, \pm i$.

ב. נציג שתי דרכים:

1. יהי λ ע"ע של A^*A, ויהי $v \neq 0$ המתאים לע"ע λ. נחשב:

$$\lambda\left\langle v, v\right\rangle = \left\langle \lambda v, v\right\rangle = \left\langle A^*Av, v\right\rangle = \left\langle Av, Av\right\rangle \implies \lambda = \frac{\left\langle Av, Av\right\rangle}{\left\langle v, v\right\rangle}$$

הרי $\left\langle v, v\right\rangle > 0$ (כי $v \neq 0$) לכן λ הוא מנת חיוביים ובפרט חיובי.

2. נבחין כי $(A^*A)^* = A^*A$ ולכן A^*A הרמיטית. לפי משפט, ידוע שהיא לכסינה אוניטרית. לכן, קיימת מטריצה אוניטרית P ומטריצה אלכסונית D כך ש:

$$P^*A^*AP = D$$

נסמן $B = AP$ ונבחין כי $B^*B = D$. נחשב:

$$\left[B^*B\right]_{ii} = \sum_{j=1}^{n}\left[B^*\right]_{ij}\left[B\right]_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\overline{b_{ji}}\cdot b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\left|b_{ji}\right|^2 \ge 0$$

לכן, איברי האלכסון של D אי-שליליים, ואלו בדיוק הע"ע של A^*A.

שאלה 4: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לסעיף)

1. קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית המקיימת $tr(A) = i$.
2. יהי Vממ"פ מימד n, ויהי B בסיס סדור של V. אזי G_B (מטריצת גראם לפי B) היא לכסינה.
3. יהי Vממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהי U ת"מ שלו. יהי $v \in V$ ונסמן ב p את ההיטל שלו על U. אזי,

$$v \in U^{\perp} \Longleftarrow ||v+p|| = ||v-p||$$

פתרון שאלה 4:

א. הפרכה: אם A הרמיטית, ידוע שהיא לכסינה (ולכן פ"א מל"ל). כעת, ידוע שאם הפ"א מל"ל אזי ה-trace של מטריצה הוא סכום הע"ע שלה, וידוע שהע"ע של מטריצה הרמיטית הם ממשיים. לכן, ה-trace ממשי (כסכום של ממשיים), והוא בפרט אינו i.

ב. הוכחה: נבחין כי:

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, v_i \rangle} = \overline{g_{ji}}$$

לכן מטריצת גראם צמודה לעצמה, ובפרט לכסינה.

ג. הוכחה: נחשב:

$$||v+p||^2 = \langle v+p, v+p \rangle = \langle v,v \rangle + \langle p,v \rangle + \langle v,p \rangle + \langle p,p \rangle = \langle v,v \rangle + 2\langle v,p \rangle + \langle p,p \rangle$$

$$||v-p||^2 = \langle v-p, v-p \rangle = \langle v,v \rangle - \langle p,v \rangle - \langle v,p \rangle + \langle p,p \rangle = \langle v,v \rangle - 2\langle v,p \rangle + \langle p,p \rangle$$

כיוון ש-$||v+p|| = ||v-p||$ ברור ש-$||v+p||^2 = ||v-p||^2$. לכן:

$$\langle v,v \rangle + 2\langle v,p \rangle + \langle p,p \rangle = \langle v,v \rangle - 2\langle v,p \rangle + \langle p,p \rangle \implies 4\langle v,p \rangle = 0 \implies \langle v,p \rangle = 0$$

נמשיך:

$$\langle v,p \rangle = \langle p + (v-p), p \rangle = \langle p,p \rangle + \underbrace{\langle v-p, p \rangle}_{0} = 0 \implies p = 0$$

הרי $\langle v-p, p \rangle = 0$ כי $v - p \in U^{\perp}$ ו-$p \in U$. כעת, ניזכר ש-$v \in U^{\perp}$ אמ"מ ההיטל שלו הוא 0, ולכן סיימנו.

שאלה 5: תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים (גדולים ממש מ 0).

1. (10 נק) הוכיחו כי קיימת מטריצה R הפיכה כך ש $M = RR^t$
2. (10 נק) תהי M כנ"ל ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש

$C^tMC = I$ וגם C^tAC היא אלכסונית

3.

הגדרה. תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים, ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נאמר כי $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא **M-ע"ע** אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ כך ש

$$Av = \lambda Mv$$

v כזה יקרא **M-ו"ע** של A המתאים ל λ.

תהי M כנ"ל (ממשית וסימטרית שכל הע"ע שלה חיוביים), ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית.

(א) (10 נק) הוכיחו שכל ה M-ע"ע של A הם ממשיים.
(ב) (7 נק) הוכיחו שקיים בסיס $\mathbb{R}^n$המורכב מ M-ו"ע של A.

פתרון:

א. M סימטרית, לכן לכסינה אורתוגונלית. לכן, קיימת P אורתוגונלית ו-D אלכסונית כך ש:

$$P^tDP = M$$

נסמן $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ונגדיר $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ (D' מוגדרת היטב כי כל הע"ע חיוביים, לכן יש להם שורש). עוד מתקיים כי $D'^2 = D$ וגם $D' = D'^t$, לכן $D = D'^t \cdot D'$. נציב:

$$M = P^tD'^tD'P = \left(D'P\right)^t\left(D'P\right)$$

לכן נסמן $R = \left(D'P\right)^t$ ונקבל את הדרוש.

ב. תהי M סימטרית עם ע"ע חיוביים ותהי A סימטרית. ידוע מסעיף א' שקיימת R הפיכה כך ש-$M = RR^t$, אזי נסתכל על$R^{-1}A\left(R^t\right)^{-1}$. זו מטריצה סימטרית, לכן לכסינה אורתוגונלית. לכן, קיימת מטריצה P אורתוגונלית ואלכסונית D כך ש:

$$P^tR^{-1}A\left(R^{-1}\right)^tP = D$$

נחשב:

$$P^tR^{-1}M\left(R^{-1}\right)^tP = P^t\cancel{R^{-1}RR^t\left(R^t\right)^{-1}}P = P^tP \underset{\text{אוניטרית } P}{=} I$$

לכן עבור $C = \left(R^t\right)^{-1}P$ מתקבל הדרוש.

ג. תהי M סימטרית עם ע"ע חיוביים ותהי A סימטרית. ידוע מסעיף א' שקיימת R הפיכה כך ש-$M = RR^t$.

1. נניח בשלילה שקיים λ ע"ע-M שאינו ממשי. יהי u ו"ע-M שמתאים ל-λ אזי:

$$Au=\lambda Mu=\lambda RR^t u \implies R^{-1}A\left(R^t\right)^{-1}R^t u=\lambda R^t u \underset{v=R^t u \text{ נסמן}}{\implies} R^{-1}A\left(R^t\right)^{-1}v=\lambda v$$

לכן λ הוא ע"ע של מטריצה סימטרית (שהיא $R^{-1}A\left(R^t\right)^{-1}$) שאינו ממשי, סתירה.

2. נסתכל על $R^{-1}A\left(R^t\right)^{-1}$. זו כאמור מטריצה סימטרית, לכן קיים בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ שמורכב מו"ע שלה (כי לכסינה) עם ע"ע $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (ייתכנו חזרות) ממשיים. נחשב לכל i:

$$R^{-1}A\left(R^t\right)^{-1}v_i=\lambda_i v_i \implies A\left(R^t\right)^{-1}v_i=\lambda_i Rv_i$$

נסמן $v_i=R^t u_i$ ונקבל:

$$Au_i=A\left(R^t\right)^{-1}R^t u_i=\lambda_i RR^t u_i=\lambda_i Mu_i$$

לכן u_i הם ו"ע-M לכל j. נראה ש-$\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס של $\mathbb{R}^n$. מהשלישי חינם, מספיק להראות שהם בת"ל. אכן, יהי צ"ל מתאפס:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i=\sum_{i=1}^n \alpha_i\left(R^t\right)^{-1}v_i=\left(R^t\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)=0$$

לכן $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\in N\left(\left(R^t\right)^{-1}\right)$. עם זאת, $\left(R^t\right)^{-1}$ כמובן הפיכה, לכן מרחב האפס שלה טריוויאלי. לכן:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i=0$$

וזהו צ"ל מתאפס של $\{v_1,\dots,v_n\}$, שידוע שבסיס. לכן, $\alpha_i=0$ לכל i ומתקבל ש-$\{u_1,\dots,u_n\}$ בת"ל ולכן בסיס, כדרוש.

נציג עוד פתרון לסעיף האחרון, שמשתמש בסעיף ב':

עבור A,M כנ"ל, ידוע שקיימת מטריצה C הפיכה ו-D אלכסונית כך ש:

$$C^tAC=D,C^tMC=I$$

לכן:

$$A=\left(C^t\right)^{-1}DC^{-1},M=\left(C^t\right)^{-1}C^{-1}$$

כעת, יהי λ ע"ע-M ו-v ו"ע-M המתאים לע"ע λ אזי:

$$Av=\lambda Mv$$

כלומר:

$$\left(C^t\right)^{-1}DC^{-1}v=\lambda\left(C^t\right)^{-1}C^{-1}v$$

נכפול ב-C^t משמאל ונקבל את השיוויון $DC^{-1}v=\lambda C^{-1}v$, לכן $C^{-1}v$ הוא ו"ע של D (שימו לב ש-$C^{-1}v\neq 0$ כי C הפיכה). ולהפך, אם $C^{-1}v$ הוא ו"ע של D אזי v הוא ו"ע-M של A (ע"י אותו החישוב). כעת, D אלכסונית ולכן לכסינה, לכן קיים בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ המורכב מו"ע של D. נסמן $u_i=Cv_i$ ונסיק ש-$\{u_1,\dots,u_n\}$ הם ו"ע-M של A. הקבוצה הזאת אכן בסיס בדומה לסוף הפתרון הקודם.