

אלגברה לינארית לביוולוגים - מועד ג'

1. (25 נק') נתונה מערכת משוואות לינאריות (מעל \mathbb{R}) התלויה בפרמטר k .

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ -kx_1 + (2 - 3k)x_2 - 2x_3 + (k + 1)x_4 & = -k \\ 3x_1 + 3kx_2 + (k^2 + 2)x_3 - 3x_4 & = 4 \end{cases}$$

(א) (15 נק') קבעו לאילו ערכי k יש למערכת הבאה פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות. נמקו כל קביעה.

(ב) (10 נק') עבור $k = 0$, מצאו את כל הפתרונות למערכת הנתונה בשאלה.

2. (25 נק') נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ונתון כי היא מטריצה הפיכה.

(א) (15 נק') מצאו את A^{-1} (ההופכית של A).

(ב) (10 נק') חשבו את $|5A^t AA|$.

3. (25 נק')

(א) (15 נק') חשבו את מרחב האפס, מרחב השורות ומרחב העמודות של המטריצה הבאה (כלומר, מצאו בסיסים ומימדים):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(ב) (10 נק') קבעו לאילו ערכי c הוקטור $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודות של A .

4. (25 נקודות) עבור המטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(א) (10 נקודות) מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

(ב) (10 נקודות) קבעו האם היא לכסינה. במידה וכן, מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = D$.

(ג) (5 נקודות) אין קשר לסעיפים הקודמים:

מצאו וקטור מנורמה 1 שמאונך ל $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

נוסחאות עזר:

1. חישוב דטרמיננטה לפי מינורים: פיתוח לפי שורה i מחושב $|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} |M_{i,j}|$

2. הזווית θ בין וקטורים u, v מוגדרת ע"י

$$\cos \theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

3. הטלה של וקטור v על w (ניתן גם לומר על: $W = \text{span}\{w\}$) הוא $\pi_W(v) = \pi_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w$