

לינארית 2 תשפ"א מועד א

מרצה: עדי בן צבי.

מתרגלים: אריאל ויצמן, אמונה ליפסקר, גלעד פורת קורן, נועה כהן.

יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 113 נק.

זמן הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון.

המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.

יש לציין בראש כל דף שאתם כותבים האם מדובר בטייטא או שזו התשובה אותה אתם

רוצים שתבדק.

1. אין קשר בין הסעיפים.

(א) תהא $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ לא הפיכה המקיימת $rank(A - 3I) = 3$ וגם $rank(A) = 3$. בנוסף ידוע כי ל A יש רק שני ע"ע שונים. מהן צורות הז'ורדן האפשריות של A ? הוכיחו תשובתכם. (13 נק)

(ב) תהינה $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצות כך ש $|A| \neq 0$ או $|B| \neq 0$. הוכיחו כי ל AB ול BA אותה צורת ז'ורדן. (13 נק)

2. בפונקציה הבאה:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}z_1z_2$$

(א) האם היא מכפלה פנימית על \mathbb{R}^3 ? הוכיחו תשובתכם. (13 נק)

(ב) יהי $W := sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ תת מרחב של \mathbb{R}^3 . מצאו את ההיטל

האורתוגונלי של הווקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ על W (**ביחס למ"פ מסעיף א**). הוכיחו תשובתכם. (12 נק)

3. אין קשר בין הסעיפים.

(א) יהי V מ"פ, ותהי $T : V \rightarrow V$ הע"ל. תת-מרחב W של V נקרא T -אינווריאנטי אם $T(W) \subseteq W$.

הוכיחו כי אם W (ת"מ של V) הוא T -אינווריאנטי, אזי W^\perp (ת"מ של V) הוא T^* -אינווריאנטי. (13 נק)

(ב) יהי V מ"פ מעל \mathbb{C} , ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי ונילפוטנטי (תזכורת: אופרטור T נקרא נילפוטנטי אם קיים $k > 0$ טבעי כך ש $T^k = 0$). הוכיחו $T = 0$. (13 נק)

4. הוכח/הפרד: יש לספק לכל סעיף הוכחה/הפרכה (6 נק לכל סעיף)

- (א) יהי V ממ"פ מעל \mathbb{C} , ותהי $S \subseteq V$. אזי, אם $S^\perp = \{0\}$ אזי S או"ג.
- (ב) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אוניטרית. אזי, $A + A^{-1}$ סימטרית.
- (ג) תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. אזי הע"ע של A ממשיים.
- (ד) יהיו $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. אם v הוא ו"ע של A וגם ו"ע של B אזי הוא גם ו"ע של $3A - 4B$.
- (ה) יהי V ממ"פ. יהי $v \in V$ המקיים שלכל $u \in V$ מתקיים: $\langle v, \frac{1}{2}u \rangle = 0$. אזי $v = 0$.
- (ו) יהי V ממ"פ מעל \mathbb{C} , ויהי $U \subseteq V$ ת"מ שלו. יהי $v \in V$ ונסמן את ההיטל שלו על U ב- p . אזי $v = p \iff (v - p) \perp v$.

בהצלחה!!!