

## מבני נתונים ואלגוריתמים – 88-280-02

### תרגיל 7

#### שאלה 1

נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  המיוצג ע"י רשימות שכנות, וצומת  $s \in V$ . לכל קשת  $e \in E$  יש משקל שלם  $w(e)$  (חיובי או שלילי). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב, לכל צומת  $v \in V$ , את המשקל המינימלי של מסלול מ- $s$  ל- $v$  בעל מספר זוגי של קשתות. (הניחו שב- $G$  אין מעגלים שליליים.)

**יעילות:**  $O(|E| + |V| \log |V|)$  כמו דיקסטרה או אם לא מניחים שהקשתות אי-שליליות אז  $O(|V||E|)$  כמו בלמן פורד

**הערה:** במקרה הזה היתה הנחיה מיוחדת שקשת שעוברים עליה פעם בכל כיוון היא מעגל באורך 2. לכן אין למעשה קשתות בעלות משקל שלילי.

#### אלגוריתם:

נסתכל על גרף דו-צדדי שבו לכל צומת מהגרף המקורי יש עותק בכל צד. עבור כל זוג צמתים  $i, j$  משני צדדים שונים, יש ביניהם קשת אם בגרף המקורי יש קשת בין שני הצמתים שהם מייצגים. משקל קשת זאת זהה למשקל הקשת מהגרף המקורי. בגרף זה נמצא את המרחקים מעותק אחד של הצומת  $s$  לכל יתר הצמתים שבצד זה. אלה המרחקים הדרושים.

#### הסבר:

מכיון שהגרף שנבנה הוא דו-צדדי אז כל המסלולים בעלי אורך זוגי שמתחילים בצד אחד מסתיימים באותו צד. לכל מסלול בעל אורך זוגי בגרף המקורי, יש מסלול מתאים בגרף זה. כל מסלול בגרף זה מייצג מסלול בגרף המקורי. מכיון שבגרף המקורי אין מעגלים בעלי אורך שלילי, אז גם בגרף הדו-צדדי אין מעגלים בעלי אורך שלילי. מספר צמתי הגרף הוא כפליים מספר צמתי הגרף המקורי ומספר קשתות הגרף הוא כפליים מספר קשתות הגרף המקורי. מכאן מתקבלת היעילות הרשומה.

#### שאלה 2

נתונה רשת זרימה  $G(V, E)$  עם מקור  $s$  ובור  $t$  ובה זרימה  $f$  שערכה  $|f| = 1000$ . האם בהכרח יש ברשת גם זרימה  $f'$  שערכה  $|f'| = 700$ ?

כן

נסתכל על רשת שקבוצת צמתיה היא קבוצת הצמתים של הרשת המקורית ובנוסף הצומת  $t_1$  וקבוצת קשתותיה היא קבוצת הקשתות של הרשת המקורית ובנוסף קשת בעלת קיבול 700 מ  $t$  ל  $t_1$ . ברשת זאת נחפש זרימה מכסימלית מ  $s$  ל  $t_1$ . מכיון שבכל רשת הערך של זרימה מכסימלית שווה לערך חתך מינימלי, אז ברשת המקורית החתך המינימלי הוא של 1000. ברשת החדשה החתך המינימלי הוא בגודל 700. לכן הזרימה המכסימלית בו היא בגודל 700. אם נזרים מ  $s$  ל  $t_1$  זרימה בגודל 700 אז כל הזרימה עוברת דרך  $t$ .

### שאלה 3

יהא  $G(V, E)$  גרף מכוון, ויהיו  $s, t \in V$ . תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, שבודק אם קיים מסלול לא פשוט מ- $s$  ל- $t$ . הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

---

**סיבוכיות:**  $O(|V| + |E|)$

#### **אלגוריתם:**

1. באמצעות שתי הרצות של אלגוריתם  $DFS$  נמצא את רכיבי הקשירות החזקה בגרף.
2. באמצעות אלגוריתם  $BFS$  ( או  $DFS$  ) נמצא את קבוצת הצמתים אליהם יש מסלול מהצומת  $s$ .
3. נסתכל על הגרף שקבוצת קשתותיו היא הקשתות בעלות כיוון הפוך מקשתות הגרף המקורי. בגרף זה נמצא את קבוצת הצמתים אליהם יש מסלול מהצומת  $t$  ( שוב באמצעות אלגוריתם  $BFS$  ).
4. התשובה היא חיובית אם ורק אם יש צומת שכלול גם בקבוצה שנמצאה בשלב 2 וגם בקבוצה שנמצאה בצעד 3 ושהוא נמצא ברכיב קשירות חזקה שבו יותר מצומת אחד.

#### **הוכחה:**

כדי שיהיה מסלול לא פשוט מ- $s$  ל- $t$ , צריך שיהיה מעגל שאליו יש מסלול מ- $s$  וממנו יש מסלול ל- $t$ . שני צמתים נמצאים על מעגל משותף אם הם באותו רכיב קשירות חזקה. קיום מסלול מהמעגל לצומת  $t$  שקול לקיום מסלול מהצומת  $t$  למעגל בגרף שבו הפכנו את כיוון הקשתות.