

## מועד א' - לינארית 2 מדעי המחשב (89113)

10.7.2018, כ"ז תמוז תשע"ח

מרצים: ד"ר עדינה היילברון ומר אחיה בר־און  
מתרגלים: מר עוזי חרוש וגב' פולינה לוצקר  
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.
- ניקוד מקסימאלי 105. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- הדפים האחרונים מכילים הגדרות מהקורס.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

**בהצלחה!**

חלק א - שאלות נכון/לא נכון. סמנו את התשובה הנכונה, לא נדרש נימוק בחלק זה.  
כל שאלה בחלק זה שווה 5 נקודות.

1. יהיו  $V, W$  מ"ו מעל הממשיים אזי קיימת ה"ל  $T : V \rightarrow W$  חד-חד ערכית.

(א) נכון.

(ב) לא נכון.

2. כל שתי מטריצות  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  הפיכות מקיימות כי הן דומות זו לזו.

(א) נכון.

(ב) לא נכון.

3. יהא  $V$  מ"ו. אז כל מטריצת מעבר  $[T]_{B'}^B$  בין כל שני בסיסים  $B, B'$  היא הפיכה.

(א) נכון.

(ב) לא נכון.

4. יהא  $V$  מרחב מכפלה פנימית. אז לכל ת"מ  $W \leq V$  מתקיים כי  $\dim W \leq \dim W^\perp$

(א) נכון.

(ב) לא נכון.

5. יהיו  $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$  שתי ה"ל. אזי  $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$

(א) נכון.

(ב) לא נכון.

חלק ב - שאלות חישוביות - רשמו תשובה סופית בלבד (בחלק זה 2 שאלות).  
את התשובות הסופיות רשמו בעמוד הבא שמיועד לחלק ב.  
כל שאלה בחלק זה שווה 20 נקודות.

1. נגדיר  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  ע"י

$$T(a + bx + cx^2) = (-3a + 4b + c) + (-2a + 2b)x + (2a - 3b - c)x^2$$

לכל  $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ .

(א) מצאו מטריצה  $A$  שמייצגת את  $T$ . כיתבו באיזה בסיסים אתם משתמשים.

(ב) מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימאלי של  $A$ .

(ג) קבעו האם  $A$  לכסינה. ובכל מקרה, מצאו את צורת זורדן ל  $A$ .

(ד) מצאו בסיס לגרעין  $\ker T$ .

2. יהא  $V = \mathbb{R}^5$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נגדיר ב

$$W = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ת"מ של  $V$ .

(א) מצאו בסיס אורתוגונאלי ל  $W$  ע"י שימוש בתהליך גרם שמידט על הבסיס  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

(ב) מצאו את ההטלה (הניצבת/האורתוגונלית) של  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  על  $W' = \text{span} \{v_1, v_2\}$  (כלומר מצאו  $(\pi_{W'}(v))$ ).

[רמז: התשובה היא אחת מהבאות:  $\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$ ]

תשובות סופיות לחלק ב:

חלק ג - שאלות תיאורטיות. בחלק זה 3 שאלות. עליכם לענות על 2 מתוך ה 3.  
 סמנו בבהירות את השאלות עליהן בחרתם לענות.  
 כתבו את תשובתכם לחלק ג' בעמודים הבאים המוקדשים לכך (סמנו בראש העמוד את השאלה עליהם אתם עונים).  
 כל שאלה בחלק זה שווה 20 נקודות.

1. יהא  $V = \mathbb{R}^n$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית ויהא  $W \leq V$ ,  $W \neq \{0\}$  תת מרחב של  $V$ .  
 נגדיר  $T : V \rightarrow V$  ע"י  $Tv = \pi_W(v)$  (פונקציית ההטלה הניצבת).

(א) מצאו את  $T^*$ .

(ב) נניח כי  $n = 3$  ו  $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  (כלומר ציר ה  $z$ ).

i. מצאו צורת זרדן של  $T$ .

ii. הוכיחו/הפריכו: המישור  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V : x + y + z = 0 \right\}$  הוא  $-T$  שמור.

2. יהא  $V$  מ"ו מימד סופי. תהא  $T : V \rightarrow V$  אופרטור לינארי. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם  $\lambda = 0$  הוא הע"ע היחיד של  $T$  ו  $T \neq 0$  אזי  $T$  אינה לכסינה.

(ב) אם קיים  $m > 1$  טבעי כך ש  $T^m = 0$  ו  $T$  לכסינה אזי  $T = 0$ .

3. תהא  $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  אופרטור לינארי. נתון כי

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet$$

$$\ker T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \bullet$$

$$\dim \text{Im}(T + I) = 3 \bullet$$

ענו על השאלות הבאות:

(א) הוכיחו כי  $T$  לכסינה ומצאו צורה אלכסונית של  $T$ .

(ב) הוכיחו/הפריכו:  $T^2 + T - 6I$  איזומורפיזם.

בהצלחה! ☺

תשובות לחלק ג - תשובה לשאלה מספר ---

תשובות לחלק ג - תשובה לשאלה מספר ---

תשובות לחלק ג - תשובה לשאלה מספר ---



תשובות לחלק ג - תשובה לשאלה מספר ---

**הגדרות:**

- קבוצות המטריצות מוגדל  $m \times n$  מעל שדה  $\mathbb{F}$  מסומנת ב  $M_{m \times n}(\mathbb{F})$  או ב  $\mathbb{F}^{m \times n}$  (תלוי אצל מי למדתם).
- תהא  $T : V \rightarrow W$  ה"ל.
- הגרעין מוגדר להיות  $\ker T = \{v \in V : Tv = 0\}$
- התמונה מוגדרת להיות  $\text{Im}T = \{Tv : v \in V\}$
- $T$  תקרא איזומורפיזם אם  $T$  חח"ע ועל.
- $T$  תקרא הפיכה אם קיימת ה"ל  $S : W \rightarrow V$  כך ש  $S \circ T = id, T \circ S = id$ .
- יהיו  $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$  שתי ה"ל. ההרכבה  $S \circ T : V \rightarrow U$  היא הפונקציה המוגדרת  $(S \circ T)(v) = S(T(v))$  לכל  $v \in V$ .
- עבור  $T : V \rightarrow V$  ה"ל נסמן  $T^m$  (לכל  $m$  טבעי) את ההרכבה של  $T$  על עצמו  $m$  פעמים.
- תהא  $T : V \rightarrow V$  ה"ל. ת"מ  $W \leq V$  יקרא  $T$  שמור אם  $Tw \in W$  לכל  $w \in W$ .
- תהא מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . וקטור  $v \in \mathbb{F}^n$  ו  $\lambda \in \mathbb{F}$  יקראו וקטור עצמי וערך עצמי בהתאמה אם  $Av = \lambda v$ . המרחב העצמי של ע"ע  $\lambda$  מוגדר להיות  $V_\lambda = N(A - \lambda I)$
- יהא  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  ותהא  $T : V \rightarrow V$  ה"ל. וקטור  $v \in V$  ו  $\lambda \in \mathbb{F}$  יקראו וקטור עצמי וערך עצמי בהתאמה אם  $Tv = \lambda v$ . המרחב העצמי של ע"ע  $\lambda$  מוגדר להיות  $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$
- יהיו  $V, W$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  ותהא  $T : V \rightarrow W$  ה"ל. מטריצת מייצגת של  $T$  עם בסיסים  $B$  של  $V$  ו  $B'$  של  $W$  היא מטריצה  $[T]_{B'}^B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  המקיימת  $[T]_{B'}^B [v]_B = [Tv]_{B'}$  לכל  $v \in V$ .
- מטריצות  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  יקראו דומות אם קיימת מטריצה  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  הפיכה כך ש  $P^{-1}AP = B$ .
- מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  תקרא ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.
- מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית.
- ה"ל  $T : V \rightarrow V$  נקראת ניתנת ללכסון אם קיים בסיס  $B$  ל  $V$  כך ש  $[T]_B^B$  אלכסונית.
- יהא פולינום  $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$  ומטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  הצבה של  $A$  בפולינום  $f$  היא מטריצה המוגדרת  $f(A) = \sum_{i=0}^d a_i A^i$  עם המוסכמה  $A^0 = I$ .
- תהא מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . הפולינום האופייני שלה מוגדר להיות  $p_A(x) = |xI - A| \in \mathbb{F}[x]$ .
- תהא מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . הפולינום המינימאלי שלה מוגדר להיות פולינום מתוקן  $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$   $0 \neq m_A(x)$  המקיים כי  $m_A(A) = 0$  ובנוסף, לכל פולינום  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  המקיים  $p(A) = 0$  מתקיים גם  $\deg m_A \leq \deg p$ .
- יהא  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  ותהא  $T : V \rightarrow V$  ה"ל. הפולינום האופייני שלה מוגדר להיות  $p_T(x) = |xI - A| \in \mathbb{F}[x]$  כאשר  $A = [T]_B^B$  מטריצה מצייגת שלה.
- יהא  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  ותהא  $T : V \rightarrow V$  ה"ל. הפולינום המינימאלי שלה מוגדר להיות פולינום מתוקן  $m_T(x) \in \mathbb{F}[x]$   $0 \neq m_T(x)$  כי  $m_T(T) = 0$  ובנוסף, לכל פולינום  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  המקיים  $p(T) = 0$  מתקיים גם  $\deg m_A \leq \deg p$ .
- מטריצה  $J \in \mathbb{F}^{n \times n}$  תקרא בצורת זורדן אם היא מטריצת בלוקים אלכסונית כאשר כל בלוק הוא מהצורה  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

- צורת זורדן של מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  היא מטריצת בצורת זורדן  $J$  ש  $A$  דומה לה.
- מטריצה  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  תקרא תקרא נילפוטטניטית אם קיים  $k$  טבעי כך ש  $A^k = 0$ .
- יהא  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  ותהא  $T : V \rightarrow V$  ה"ל.  $T$  תקרא תקרא נילפוטטניטית אם קיים  $k$  טבעי כך ש  $T^k = 0$ .
- יהא  $V$  מ"ו. מטריצת מעבר  $[I]_{B'}^B$  בין בסיסים  $B$  ל  $B'$  היא המטריצה היחידה המקיימת  $[I]_{B'}^B [v]_B = [v]_{B'}$  לכל  $v \in V$ .
- יהא  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . מכפלה פנימית על  $V$  היא פונקציה  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  המקיימת:
  1. לינאריות ברכיב הראשון:  $\langle \alpha v_1 + v_2, v \rangle = \alpha \langle v_1, v \rangle + \langle v_2, v \rangle$  לכל  $v_1, v_2, v \in V$  ולכל  $\alpha \in \mathbb{F}$ .
  2. הרמטיות  $\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$  לכל  $v_1, v_2 \in V$  (הסימון  $\overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$  פירושו הצמוד המרוכב של  $\langle v_2, v_1 \rangle$ ).
  3. אי שליליות:  $0 \leq \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$  לכל  $v \in V$ . ובנוסף, לכל  $v \in V$ :  $0 = \langle v, v \rangle$  אם ורק אם  $v = 0$ .
 במידה ו  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  מ"פ על  $V$  אזי נאמר ש  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  מרחב מכפלה פנימית.
- יהא  $V$  מרחב מכפלה פנימית ו  $S \subseteq V$  תת קבוצה. המרחב הניצב ל  $S$  מוגדר להיות  $S^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in S : \langle v, u \rangle = 0\}$  (כאשר  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  היא המכפלה הפנימית).
- יהא  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  מרחב מכפלה פנימית. יהא  $0 \neq W \leq V$  ו  $v \in V$  הטלה (ניצבת/אורתוגונלית) של  $v$  על  $W$  הוא וקטור המסומן  $\pi_W(v) \in W$  והוא מקיים: 1.  $\pi_W(v) \in W$ . 2.  $v - \pi_W(v) \in W^\perp$ .
- יהא  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  מרחב מכפלה פנימית מעל שדה  $\mathbb{F}$ .
  - הנורמה המשוריית היא פונקציה  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{F}$  המוגדרת  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
  - וקטורים  $v, u \in V$  יקראו אורתוגונאליים אם  $\langle v, u \rangle = 0$ . קבוצה  $S \subseteq V$  תקרא אורתוגונאלית אם כל  $v \neq u \in S$  אורתוגונאליים.
  - וקטור  $v \in V$  יקרא נורמלי אם  $\|v\| = 1$ .
  - קבוצה  $S \subseteq V$  תקרא אורתונורמלית אם קבוצה אורתוגונאלית ובנוסף כל  $v \in S$  נורמלי.
  - קבוצה  $S \subseteq V$  תקרא בסיס אורתוגונאלית אם  $S$  קבוצה אורתוגונאלית וגם בסיס.
  - קבוצה  $S \subseteq V$  תקרא בסיס אורתונורמלית אם  $S$  קבוצה אורתונורמלית וגם בסיס.
- פונקציונאל הוא ה"ל  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$  כאשר  $V$  מ"פ מעל  $\mathbb{F}$ .
- יהיו  $V, W$  מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה ותהא  $T : V \rightarrow W$  ה"ל. העתקה הצמודה  $T^* : W \rightarrow V$  מוגדרת להיות העתקה המקיימת  $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$  לכל  $v \in V$  ולכל  $w \in W$  (כאשר  $\langle Tv, w \rangle$  היא המכפלה הפנימית על  $W$  ו  $\langle v, T^*w \rangle$  היא המכפלה הפנימית על  $V$ ).
- תהא  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . נגדיר  $A^*$  להיות  $\bar{A}^t$  (כאשר  $\bar{A}^t$  היא הצמדת כל כניסה במושחלפת של  $A$ ).
- יהיה  $V$  מרחב מכפלה פנימית ו  $T : V \rightarrow V$  ה"ל.
  1.  $T^*T = TT^*$  אם  $T$  תקרא נורמלית
  2.  $T^* = T$  אם  $T$  תקרא הרמיטית
  3.  $TT^* = I$  אם  $T$  תקרא אוניטרית
- תהא  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ .
  1.  $A^*A = AA^*$  אם  $A$  תקרא נורמלית
  2.  $A^* = A$  אם  $A$  תקרא הרמיטית
  3.  $AA^* = I$  אם  $A$  תקרא אוניטרית