

מבחן מועד ג' – חדו"א 2 לאודיסאה – 03/10/22

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: ד"ר ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ e^x - \frac{1}{e^x} & x \neq 0 \\ \frac{2x}{2x} & x \neq 0 \end{cases}$$

א. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$e^x - \frac{1}{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ידוע כי בכל הממשיים

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

אם נציב $-x$ נקבל כי

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^x - \frac{1}{e^x} = e^x - e^{-x} = 2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ב. חשבו את הנגזרות $f^{(100)}(0), f^{(101)}(0)$.

ראשית נחשב את טור החזקות של f

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ e^x - \frac{1}{e^x} & x \neq 0 \\ \frac{2x}{2x} & x \neq 0 \end{cases}$$

כאשר $x \neq 0$ מותר לחלק ב- $2x$ את המשוואה

$$e^x - \frac{1}{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ונקבל

$$\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

מה קורה כאשר $x = 0$? כאשר מציבים אותו בטור?

מקבלים 1.

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2x} & x \neq 0 \end{cases}$$

כלומר $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ לכל x .

ובטור החזקות, המקדמים חייבים להיות מקדמי טיילור.

מי המקדם של x^{100} ?

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$$

בטור שאנחנו מצאנו הגורם המתאים הוא

$$\frac{x^{100}}{101!}$$

כלומר המקדם הוא $\frac{1}{101!}$ וביחד

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = \frac{1}{101!}$$

$$f^{(100)}(0) = \frac{1}{101}$$

מה המקדם של x^{101} בטור? אפס! כי ביטוי זה אינו מופיע בטור.

ולכן

$$f^{(101)}(0) = 0$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

א. מצאו את פונקציית הגבול $f(x)$, ובפרט את תחום ההגדרה שלה.

כאשר מחשבים את פונקציית הגבול, x הוא קבוע ו $n \rightarrow \infty$

יהי x צריך לחשב את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = \left\{ \begin{array}{l} ? \\ \infty \end{array} \right\}$$

גבול המונה תלוי בx

אם $x \in (-1,1)$ המונה שואף לאפס, המכנה שואף לאינסוף, ולכן סה"כ הגבול הוא אפס.

אם $x = \pm 1$ המונה חסום, המכנה שואף לאינסוף ולכן הגבול הוא אפס.

אם $|x| > 1$ אזי

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \rightarrow \infty$$

לפי מבחן המנה

$$\left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \cdot \left| \frac{n}{x^n} \right| \rightarrow |x| > 1$$

ולכן סה"כ פונקצית הגבול קבועה אפס, בתחום ההגדרה $[-1,1]$

ב. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[-1,1]$.

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[-1,1]} \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

הערה:

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

זוהי אכן המקסימום כי $f_n(1) = \frac{1}{n}$.

כמובן ש $d_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ולכן יש התכנסות במ"ש.

3. תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית המקיימת לכל $x, y \in \mathbb{R}$ כי

$$f_x(x, y) = f_y(x, y)$$

הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$f(x, y) = f(y, x)$$

רמז: הביטו בפונקציה $g(t) = f(x - t, y + t)$.

יהיו x, y

נגזור את הפונקציה מהרמז

$$g(t) = f(x - t, y + t)$$

$$g'(t) = f_x(x-t, y+t) \cdot (-1) + f_y(x-t, y+t) \cdot 1 \stackrel{\text{הנתון}}{=} 0$$

כלומר הפונקציה $g(t)$ קבועה!

$$g(t) = C$$

נציב $t = 0$ ונקבל כי

$$g(0) = C = f(x, y)$$

ועכשיו ל"הברקה" נציב $t = x - y$

$$f(x, y) = g(x - y) = f(x - (x - y), y + (x - y)) = f(y, x)$$

$$4. \text{ נביט בפונקציה } f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

א. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x, y)$ (מקס' מקומי, מינ' מקומי, אוקף).

הנקודות הקריטיות הן הנק' בהן הגרדיאנט מתאפס

$$\nabla f = (f_x, f_y) \stackrel{?}{=} (0, 0)$$

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

הנקודה החשודה היחידה היא $(0, 0)$

הערה: קל מאד להוכיח שמדובר במקסימום מקומי, כיוון שזה המקסימום המוחלט!

$$f(0, 0) = 1$$

$$f(x, y) \leq 1$$

נתעלם מכך, ונמשיך לחישוב הרגיל עם ה

נחשב את הנגזרות השניות:

$$f_{xx} = \frac{-2(x^2 + y^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + y^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + y^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

$$f_{yy} = \frac{-2(x^2 + y^2 + 1) + 8y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

$$f_{xy} = 2x \cdot \frac{2(x^2 + y^2 + 1) \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^4} = \frac{8xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

$$\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 4 > 0$$

כלומר מדובר בקיצון מקומי

כיוון ש

$$f_{xx}(0,0) = -2 < 0$$

מדובר במקס' מקומי.

ב. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x,y)$ בתחום $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

עלינו לאסוף נקודות חשודות מפנים התחום ומהשפה.

בפנים התחום כבר מצאנו את $(0,0)$ שהיא אכן בתוך מעגל היחידה.

על השפה, נשתמש בכופלי לגראנז':

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 2\lambda x \\ \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

זכרו: כאשר מדגדג בנו הצורך לצמצם – לא נצמצם – נעביר אגף ונוציא גורם משותף

$$2x \left(\lambda + \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right) = 0$$

או ש $x = 0$ או ש

$$\lambda = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

אם $x = 0$ אז $y = \pm 1$ (מהמשוואה השלישית) וקיבלנו שתי נקודות חשודות $(0,1), (0,-1)$

אחרת

$$\lambda = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

ומקבלים שהמשוואה השנייה מתקיימת תמיד!

כל הנקודות על שפת המעגל חשודות!

למזלנו, כל הנקודות על השפת המעגל מקיימות כי $x^2 + y^2 = 1$ ולכן

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

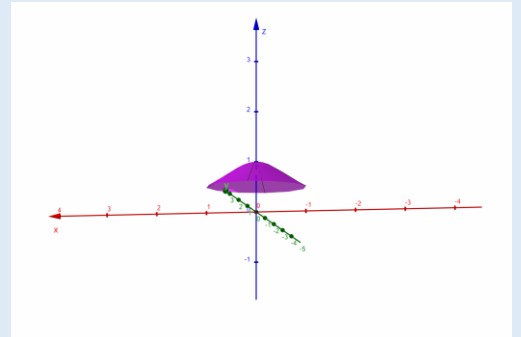
כלומר ערך הפונקציה בקצוות קבוע $\frac{1}{2}$

הצבנו אינסוף נקודות חשודות, בבת אחת.

בנק' החשודה בפנים התחום מתקיים כי

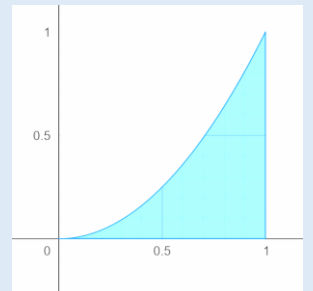
$$f(0,0) = 1$$

ולכן המקסימום בתחום הוא 1 ואילו המינימום בתחום הוא $\frac{1}{2}$



5. יהי בית שתחום הרצפה שלו הוא $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ וגובה התקרה שלו הוא $f(x,y) = x$. מצאו את שטח הפנים הכולל של הבית (רצפה, קירות ותקרה).

ראשית נשרטט את הריצפה:



נתחיל בשטח הרצפה שהוא פשוט

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

שטח הקירות הוא אינטגרל קווי מסוג ראשון על מסילות השפה של התחום של פונקציית התקרה.

$$\vec{r}_1(t) = (t, t^2), \quad t \in [0,1]$$

נקרא למסלול זה C_1

$$\int_{C_1} f dr = \int_0^1 f(\vec{r}_1(t)) \cdot \|\vec{r}'_1(t)\| dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1^2 + (2t)^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + 4t^2 \\ du = 8t dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{8} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^5 = \frac{\sqrt{5^3} - 1}{12}$$

נעבור לקיר של החלק למטה בשרטוט לעיל שנשמנו C_2

$$\vec{r}_2(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_{C_2} f dr = \int_0^1 f(\vec{r}_2(t)) \cdot \|\vec{r}'_2(t)\| dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} dt = \frac{1}{2}$$

נעבור לקיר האחרון, מעל המסלול C_3

$$\vec{r}_3(t) = (1, t), \quad [0, 1]$$

$$\int_{C_3} f dr = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{0^2 + 1^2} dt = 1$$

לבסוף שטח התקרה הוא האינטגרל המשטחי על משטח התקרה של 1.

$$M = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ z = f(x, y) \end{array} \right\}$$

צריך פרמטריזציה למשטח התקרה

$$\vec{s}(x, y) = (x, y, x), \quad (x, y) \in D$$

ולכן

$$\iint_M 1 dS = \iint_D 1 \cdot \|\vec{s}_x \times \vec{s}_y\| dx dy$$

$$\vec{s}_x \times \vec{s}_y = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0, 1)$$

$$\|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$$

$$\iint_M 1 dS = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\iint_D dx dy}_{\text{שטח הרצפה}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

סה"כ שטח הפנים של הבית בנוי משטח הרצפה + שטח התקרה + שטחי שלושת הקירות

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{5^3} - 1}{12} + \frac{1}{2} + 1$$

6. נביט בתחום $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, בעל השפה C , ונביט בשדה הוקטורי

$$\vec{F} = (-y^3 + y^2 e^x)\hat{i} + (x^3 + 2ye^x)\hat{j}$$

חשבו את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה הוקטורי על השפה נגד כיוון השעון:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

מה האפשרויות שלנו כאשר אנו נגשים לשאלה כזו?

אחד – למצוא פרמטריזציה של השפה C ולבצע חישוב ישיר של האינטגרל מסוג שני.

שנים - להמיר את האינטגרל בעזרת אחד המשפטים:

גרין – ממיר בין אינטגרל קווי מסוג שני במישור, לבין אינטגרל כפול.

גאוס – ממיר בין אינטגרל משטחי מסוג שני לבין אינטגרל משולש.

סטוקס – ממיר בין אינטגרל קווי מסוג שני במרחב, לבין אינטגרל משטחי מסוג שני.

נתחיל בלנסות חישוב ישיר, למרות שאינטואיטיבית (בתור מחבר השאלה) זה נראה לי לא המצב.

פרמטריזציה של מעגל היחידה נגד כיוון השעון היא

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

לכן

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^3(t) + \sin^2(t) e^{\cos(t)}, \cos^3(t) + 2 \sin(t) e^{\cos(t)}) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^4(t) - \sin^3(t) e^{\cos(t)} + \cos^4(t) + 2 \sin(t) \cos(t) e^{\cos(t)}] dt \end{aligned}$$

זה נראה קצת מסובך מידי, כפי שחשדתי, בואו ננסה להשתמש בגרין!

גרין אומר שהאינטגרל הקווי מסוג שני על השפה של תחום במישור, נגד כיוון השעון, שווה לאינטגרל הכפול על $curl$ של השדה הוקטורי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D curl(\vec{F}) dx dy$$

נסמן

$$\vec{F} = (P, Q) = (-y^3 + y^2 e^x, x^3 + 2ye^x)$$

$$curl(\vec{F}) = Q_x - P_y = 3x^2 + 2ye^x - (-3y^2 + 2ye^x) = 3(x^2 + y^2)$$

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

גם עכשיו ישנן שתי אופציות להתקדמות:

אחת – הצגת התחום D כסטנדרטי לפי אחד המשתנים

שתיים – שינוי קואורדינטות. (נבחר בזה)

$$= 3 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\theta \right) dr = 3 \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 r^3 dr = 3 \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dx dy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1 dx dy$ הוא השטח של התחום D .

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y) \in D \quad (u, v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv$$

קואורדינטות קוטביות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x, y) \in D \quad (r, \theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

אינטגרלים משולשים

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dx dy dz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1 dx dy dz$ הוא הנפח של התחום V .

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dx dy dz = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y, z) \in V \quad (u, v, w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, \phi) \in V'$$

$$\iiint_V f dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1 dr$ הוא אורך המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1 dr$ הוא האורך של המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על

חלקיק שנע לאורך המסלול.

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q(\vec{r}(t)) \cdot y'(t) dt$$

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות
אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב ל- C נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $\text{curl}(\vec{F})$ על התחום D .

נסמן

$$\vec{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) dx dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקציית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M f dS$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iint_M 1 dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f(\vec{s}(u, v)) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| du dv$$

אינטגרלים משטחיים מסוג שני

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ויהי כיוון לנורמל למשטח.
אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{s}(u, v)) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) du dv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz$$

משפט סטוקס

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$