תרגול כיתה 7 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
משתנים מקריים בדידים, תוחלת ושונות

משתנה מקרי (מ"מ) X: פונקציה ממרחב המדגם לישר הממשי $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

תוחלת של משתנה מקרי בדיד

$$E(X)=\sum_k k\cdot P(X=k)$$

טרנספורמציה לינארית: $E(aX+b)=aE(X)+b$

כאשר $g(X)$ היא פונקציה של המ"מ X, התוחלת שלה: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P(X=k)$

שונות של משתנה מקרי

$$Var(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

טרנספורמציה לינארית: $Var(aX+b)=a^2\cdot Var(X)$

שאלה 1

מסובבים 2 סביבונים זהים. על הפאות של כל סביבון מסומנים המספרים (1,1,2,3).

א. נגדיר משתנה מקרי X = סכום 2 הסיבובים. מצא את פונ' ההסתברות ופונ' ההתפלגות המצטברת של X.
ב. חשב את השכיח, החציון, התוחלת והשונות של X.
ג. נגדיר משתנה חדש: $Y=4X-17$. מצא את התוחלת והשונות של Y.
ד. נגדיר משתנה חדש נוסף: $Z=(X-5)^2$. מצא את התפלגות Z וחשב את שונותו.

פתרון:

א). הערכים האפשריים של X הם- 2,3,4,5,6 וההסתברויות נתונות בטבלה הבאה:

$\{\omega\}$	{(1,1)}	{(1,2),(2,1)}	{(1,3),(2,2),(3,1)}	{(2,3),(3,2)}	{(3,3)}
X	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16
$F_X(k)$	1/4	1/2	13/16	15/16	1

חישוב התאים בטבלה הנ"ל:

$$P(X=3)=P(1)\cdot P(2)+P(2)\cdot P(1)=2\cdot 1/2\cdot 1/4=1/4\ ;;\ P(X=2)=P(1)\cdot P(1)=1/2\cdot 1/2=1/4$$

$$P(X=4)=P(1)\cdot P(3)+P(2)\cdot P(2)+P(3)\cdot P(1)=(1/2\cdot 1/4)+(1/4\cdot 1/4)+(1/4\cdot 1/2)=5/16$$

$$P(X=5)=P(2)\cdot P(3)+P(3)\cdot P(2)=2\cdot 1/4\cdot 1/4=1/8$$

$$P(X=6)=P(3)\cdot P(3)=1/4\cdot 1/4=1/16$$

(נשים לב שסכום התאים הוא 1 כמובן. לכן אפשר לחשב את כל התאים מלבד המסובך ביותר לחישוב).

ב). השכיח (Mo) הוא הערך/ים שהסתברותו מקסימלית. מטבלת ההתפלגות: $Mo=4$.

החציון (m) הוא הערך המקיים $P(X\le m)\ge\frac{1}{2}$ וגם $P(X\ge m)\ge\frac{1}{2}$. מהטבלה: $m=(3+4)/2=3.5$

התוחלת של X: $E(X)=\sum_k k\cdot P(X=k)=2\cdot 1/4+3\cdot 1/4+4\cdot 5/16+5\cdot 1/8+6\cdot 1/16=3.5$

נשתמש בנוסחה הנוחה לשונות של X: $Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$

חישוב עזר- $E(X^2)=\sum_k k^2\cdot P(X=k)=2^2\cdot 1/4+3^2\cdot 1/4+4\cdot 5/16+5^2\cdot 1/8+6^2\cdot 1/16=13.625$

והשונות: $Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=13.625-3.5^2=1.375$

ג). המ"מ Y הוא טרנספורמציה לינארית של המ"מ X, לכן

$$E(Y)=E(4X+5)=4\cdot E(X)+5=4\cdot 3.5-17=-3$$

$$V(Y)=V(4X+5)=4^2\cdot V(X)=16\cdot 1.375=22$$

ד). נבנה את טבלת ההתפלגות של המשתנה Z (בהתייחס לטבלה המקורית):

X	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16
$Z=(X-5)^2$	9	4	1	0	1

נשים לב ש- Z מקבל רק 4 ערכים: Z = {0,1,4,9}, כלומר טבלת ההתפלגות שלו:

Z	0	1	4	9
$Z=(X-5)^2$	1/8	6/16	1/4	1/4

חישוב ע"י נוסחת השונות של Z: $Var(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2$. נחשב כ"א מהמרכיבים-

$$E(Z)=\sum_k k\cdot P(X=Z)=9\cdot 1/4+4\cdot 1/4+1\cdot(5/16+1/16)+0\cdot 1/8=3.625$$

$$E(Z^2)=\sum_k k^2\cdot P(X=Z)=9^2\cdot 1/4+4^2\cdot 1/4+1^2\cdot(5/16+1/16)+0^2\cdot 1/8=24.625$$

והשונות המבוקשת: $Var(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=24.625-3.625^2=17.734$

<u>שאלה 2</u>

משתנה מקרי X מקבל את הערכים ...0,1,2 בהסתברות $P(X=i)=\frac{C}{3^i},\quad i=0,1,2...$

א. מצא את הערך של הקבוע C.
ב. את התוחלת של X.
ג. את ההסתברות ש- X > 5
ד. את ההסתברות ש-X לא זוגי.

<u>פתרון:</u>

א). מכיוון שנתונה פונקציית הסתברות צריך להתקיים $\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=1$

לכן: $1=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{C}{3^i}\quad =1=C\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\quad \Rightarrow 1=C\cdot\left(\frac{1}{1-1/3}\right)\quad \Rightarrow C=2/3$

סכום סדרה הנדסית $(|q|<1)\quad \sum_k a_k=\frac{a_1}{1-q}$

ב). התוחלת:

$$E(X)=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot P(X=i)=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot(2/3)\cdot\frac{1}{3^i}=2/3\cdot\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\frac{1}{3^i}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1\cdot(1/3)+2\cdot(1/3)^2+3\cdot(1/3)^3+...\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1+2\cdot(1/3)+3\cdot(1/3)^2+....\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{1}{3^{i-1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right)'}_{(***)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

(***) $\frac{9}{4}=\frac{1}{(1-1/3)^2}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{1}{3^i}\right)'\quad\Leftarrow\quad \frac{1}{(1-q)^2}=\left(\frac{1}{1-q}\right)'$ (הנגזרת של סכום הטור = נגזרת הטור)

ג). ההסתברות לערכים הגדולים מ-5:

$$P(X>5)=1-P(\le 5)=1-2/3\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)=0.00137$$

ד). הסתברות לערכים אי זוגיים:

$$P(X\ odd)=1-P(X\ even)$$
$$=1-\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k)=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$
$$=1-2/3\cdot\left(\frac{1}{1-1/9}\right)=1-3/4=1/4$$

שאלה 3

בשק נמצאים שישה תלושי הגרלה עם סכומי זכייה בש"ח: על שלושה רשום המספר 0, על שניים המס' 20 ועל אחד המס' 40.

מהמר נדרש לשלם 20 ש"ח על מנת להשתתף בהגרלה. עליו למשוך שני תלושים מהשק והוא זוכה בסכום אשר שווה לממוצע החשבוני של שני המספרים ששלף. מצא את:

א. פונקציית התפלגות הסכום שהמהמר מקבל.
ב. תוחלת ושונות הרווח של המהמר.

פתרון:

נגדיר מ"מ: X – את הסכום שהמהמר מקבל.

א). נבנה את טבלת ההתפלגות

ההסתברות	המקרה $\{\omega\}$	הסכום המתקבל (X) = הממוצע
$\binom{3}{2}\Big/\binom{6}{2}=3/15$	0,0	0
$\binom{2}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{6}{2}=6/15$	0,20	10
$\binom{2}{2}\Big/\binom{6}{2}+\binom{3}{1}\binom{1}{1}\Big/\binom{6}{2}=4/15$	20,20 או 40,0	20
$\binom{1}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{6}{2}=2/15$	40,20	30

ב). נגדיר מ"מ: Y – הרווח של המהמר. מתקיים $Y=X-20$.

למציאת $E[Y],V[Y]$ נחשב תחילה $E[X],V[X]$ ואח"כ נעזר בתכונות התוחלת והשונות לעבור ל-Y:

$$E(X)=0\cdot(3/15)+10\cdot(6/15)+20\cdot(4/15)+30\cdot(2/15)=40/3$$
$$E(Y)=E(X-20)=E(X)-20=\boxed{-20/3}$$
$$Var(Y)=Var(X-20)=Var(X)$$
$$Var(x)=E(x^2)-E(X)^2=0\cdot(3/15)+10^2\cdot(6/15)+20^2\cdot(4/15)+30^2\cdot(2/15)-[40/3]^2$$
$$=\boxed{800/9}$$