בס"ד

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות – פתרון מספר 1

קומבינטוריקה

1. להושיב 3 בנים ו-5 בנות בשורה: סה"כ 8 אנשים ולכן $8!$
להושיב אותם כך שכל הבנים וכל הבנות יושבים ביחד: $2!\cdot 3!\cdot 5!$

2. מספר המילים השונות (לאו דווקא בעלות משמעות) שניתן ליצור מכל אותיות המילה MISSISSIPPI:
סה"כ יש 11 אותיות מתוכן ארבע I , ארבע S , ושתי P : $\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$

3. מספר הדרכים לבחור ועד של חמישה אנשים מתוך 12 : $\binom{12}{5}$

מספר הדרכים לחלק 12 אנשים ל-3 ועדים של 3 , 4, ו- 5 אנשים : $\frac{12!}{5!\cdot 4!\cdot 3!}$

4. א. לבחור r אנשים מתוך $n+m$: $\binom{n+m}{r}$

ב. מספר הדרכים לבחור r אנשים מתוך קבוצה של n גברים ו- m נשים , אם רוצים שבקבוצה הנבחרת יהיו k נשים : (יש להניח ש- $r < n,m$)

$$\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

ג. צ"ל :

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

הוכחה אינטואיטיבית: סה"כ האפשרויות לבחירת r אנשים מתוך $n+m$ הוא סכום האפשרויות לבחור :
0 מ- n ואת כל ה- r מ- m או
1 מ- n ו- $r-1$ (כל הנותרים) מ- m או
2 מ- n ו- $r-2$ (כל הנותרים) מ- m או ....
את כל ה- r מ- n ו- 0 מ- m מש"ל

הוכחה מתמטית: נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון - $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^kY^{n-k}$

ונחשב :

$$(X+1)^{n+m} = \binom{n+m}{0}X^0 + \binom{n+m}{1}X^1 + \binom{n+m}{2}X^2 + \ldots + \binom{n+m}{r}X^r + \ldots + \binom{n+m}{n+m}X^{n+m}$$

ניתן לראות שהביטוי שברצוננו להוכיח, $\binom{n+m}{r}$, מופיע במשוואת הבינום כמקדם של X^r,

נבטא בעוד דרך את המקדם של X^r:

$$(X+1)^{n+m} = (X+1)^n (X+1)^m$$
$$= (\binom{n}{0}X^0 + \binom{n}{1}X^1 + \ldots + \binom{n}{r}X^r + \ldots + \binom{n}{n}X^n)(\binom{m}{0}X^0 + \binom{m}{1}X^1 + \ldots + \binom{m}{r}X^r + \ldots + \binom{m}{m}X^m)$$

אם נפתח את הסוגריים ונכפיל עפ"י חוק הפילוג, יתקבל סכום של ביטויים, כשכל ביטוי הוא מכפלה של X בחזקה כלשהי ומקדם.
נסכום את כל הביטויים שהם מכפלה של X בחזקת r ומקדם (כי ברצוננו לבטא בדרך נוספת את <u>המקדם של</u> X^r):

$$\binom{n}{0}X^0\binom{m}{r}X^r + \binom{n}{1}X^1\binom{m}{r-1}X^{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}X^{r-1}\binom{m}{1}X^1 + \binom{n}{r}X^r\binom{m}{0}X^0$$
$$= X^r\left[\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0}\right]$$

$$\Leftarrow \quad \binom{n+m}{r}X^r = \left[\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0}\right]X^r$$

$$\Leftarrow \quad \binom{n+m}{r} = \left[\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0}\right]$$

מש"ל.

5. זהו מרחב מדגם סופי, אך כמובן לא סימטרי. עדיין ניקח את F כ"כל התתי קבוצות" (2 בחזקת Ω).

ההסתברות היא אם כן

$$\frac{1}{6}*\frac{1}{2}+\frac{1}{6}*2*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}+\frac{1}{6}*3*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}+\frac{1}{6}*4*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}+$$
$$\frac{1}{6}*5*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}+\frac{1}{6}*6*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{16+16+12+8+5+3}{2*2*2*2*2*6}=\frac{60}{6*2}*\frac{1}{16}=5/16$$

6. יותר קל למצוא את מספר האופציות שבהן הם כן יהיו יו"ר וסיו"ר. במקרה כזה לא ממש אכפת לנו מי נבחר לגזבר ולכן מספר האפשרויות הוא

$\frac{1}{1225} = \frac{2*1}{50*49}$ ולכן התשובה לשאלה המקורית היא 1224/1225.

7. העליון יהיה אס 1/13 כמובן.
התחתון אפשר בשתי דרכים -
דרך א' - ממש לרשום את כל האופציות - (ראשון אס/ראשון לא אס) ולפרק למקרים -

$$\frac{4*3+48*4}{52*51} = \frac{12+192}{52*51} = \frac{204}{52*51} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

דרך ב' - לפני שמסתכלים על הקלף התחתון (וגם לפני שמסתכלים על הקלף העליון) - מחליפים ביניהם. ממילא החפיסה מעורבבת היטב כך שזה לא משנה. עכשיו (עדיין לא להסתכל...) הסיכוי של העליון/תחתון הוא 1/13 לאס, ועכשיו מחזירים אותו בחזרה למטה. הסיכוי הוא אם כן 1/13.

כנ"ל בתחתית הערימה 1/13.

8. בספר לוקחים שנה לא מעוברת 355 יום.
כאן יש מדגם סדור בגודל $\#\Omega = 366^K$,

ומספר האפשרויות הוא $\# A = 366*365*...*(366-K+1) = (366-0)*(366-1)*...*(366-K+1)$ (כלומר K ימי הולדת שונים).

סה"כ

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{366!}{(366-k)!}}{(366)^k}$$

9. א. כאן אין חשיבות לסדר המספרים. ולכן ההסתברות היא $0.00000012 \cong \frac{1}{\binom{45}{6}} = p(A)$, מה שמראה שרק בודדים זוכים בסוף השבוע הנכסף.

ב.כאן נשאר לחשב כמה קבוצות של "זכיית ספר" ישנם. לשם כך צריך לבחור 5 מספרים נכונים מתוך 6, ועוד אחד לא נכון (מתוך 39=45-6).

$$\# A = \binom{6}{5}*39 = 235$$

סה"כ $0.000028 \cong \frac{235}{\binom{45}{6}} = p(A)$. עדיין לא גבוה במיוחד...