שיטת ריבועים מינימליים (רגרסיה לינארית)

הגדרת הבעיה

נתונה סדרה של נקודות $(x_n,y_n),\dots,(x_0,y_0)$ ונרצה
לקבוע פולינום ממעלה נמוכה p ש

$$p(x_i)\approx y_i$$

כלומר נרצה להביא למינימום את הנורמה של

$$\|p(x)-y\|=\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(p(x_i)-y_i)^2}$$

$$S=\sum_{i=0}^{n}(p(x_i)-y_i)^2$$

נגדיר את הבעיה

דוג׳: לקווי $p=ax+b$

$$S=\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

נגזור את S לפי a ולפי b ונשווה ל-0

$$0=\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)\cdot x_i \quad \backslash :2$$

$$0=\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i) \quad \backslash :2$$

$$\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=0}^{n}ax_i^2+bx_i-y_ix_i=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=0}^{n}ax_i^2+\sum_{i=0}^{b}bx_i-\sum_{i=0}^{n}x_iy_i=0$$

$$* \quad a\sum_{i=0}^{n}x_i^2+b\sum_{i=0}^{n}x_i=\sum_{i=0}^{n}x_iy_i$$

$$\sum_{i=0}^{n}ax_i+b-y_i=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=0}^{n}ax_i+\sum_{i=0}^{n}b=\sum_{i=0}^{n}y_i=0$$

$$* \quad a\sum_{i=0}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

נציב את * בצורה מטריצית

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}x_i\\ \sum^{n}x_i & \sum^{n}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}x_iy_i\\ \sum^{n}y_i\end{pmatrix}$$

$$p(x)=ax+b \approx y$$

זו
בטוח שיש לה
פתרון

$$\left.\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] \cdot A^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}}_{A^T}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{A^T}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}$$

בגלל
מערכת
ריבועית -
בטוח קיים
פתרון

התהליך של הכפלה ב-A^T

משמאל נקרא רגולציה

תרגול 6

ריבועים מינימלים

נתונה סדרת נקודות $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$

ונרצה לקבל פולינום ממעלה נמוכה כך שיתקיים

$p(x_i) \approx y_i$

כלומר נרצה להביא למינימום את הנורמה

$$\| p(x)-y \| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (p(x_i)-y_i)^2}$$

למצוא את המינימום של
מה שבתוך השורש ← מינימום של השורש

נגדיר:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (p(x_i)-y_i)^2$$

נמצא מינימום של S

$$p(x) = ax+b$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} (ax_i+b-y_i)^2$$

נגזור לפי a, b

$$\circledast \quad \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=0}^{n} 2(ax_i+b-y_i)x_i = 0$$

$$\circledast\circledast \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=0}^{n} 2(ax_i+b-y_i) = 0$$

$$\circledast \quad \sum_{i=0}^{n} ax_i^2+bx_i-y_ix_i = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} ax_i^2 + \sum_{i=0}^{n} bx_i - \sum_{i=0}^{n} y_ix_i = 0$$

$$\circledast\circledast \quad \sum_{i=0}^{n} ax_i+b-y_i = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} ax_i + \sum_{i=0}^{n} b - \sum_{i=0}^{n} y_i = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \circledast \quad & a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_ix_i \\ \circledast\circledast \quad & a\sum_{i=0}^{n} x_i + b\sum_{i=0}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n} y_i \end{aligned}\right\} \text{מערכת משוואות לינארית}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

תרגול

מצאו קו ישר שהוא הקירוב הטוב ביותר
מבחינת ריבועים מינימליים לנתונים הבאים

x	0.3	0.4	0.6	0.8
y	1	0.9	1.2	1.5

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot A^T$$

משמאל

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{3} x_i^2 & \sum_{i=0}^{3} x_i \\ \sum_{i=0}^{3} x_i & \sum_{i=0}^{3} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{3} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{3} y_i \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.25 & 2.1 \\ 2.1 & 4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\tilde{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.58 \\ 4.6 \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

קצת מהזורה:

נפתור $\tilde{X} = \tilde{A}^{-1} \tilde{b}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.118 \\ 0.5627 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y = 1.118x + 0.5627}$$

עבור פולינום $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$ax_i^2 + bx_i + c \approx y_i$$

אפשרות 1:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

נגזור לפי a, b, c

אפשרות 2

$$ax_i^2 + bx_i + c\cdot 1 \approx y_i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Big|\cdot A^T$$

משמאל

$$\underset{3\times n}{\begin{pmatrix} x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1 & & x_n \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}} \underset{n\times 3}{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} = \underset{3\times n}{\begin{pmatrix} x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

תרגיל

לפניכם תוצאות של תצפיות:

x	2.2	2.5	3.5	4	5	7	10	13
y	1.5	10	4	4.5	3	3	1.5	2.5

ידוע שהפונק' מתוארת ע"י $f(x)=\frac{1}{d_1x+d_0}$

מצאו את d_1, d_0 בעזרת רגרסיה לינארית

פתרון

נגדיר $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ונקבל

$$g(x)=d_1x+d_0$$

נעשה מינימום לפונק' S

$$S=\sum_{i=1}^{8} d_1x_i+d_0-\frac{1}{y_i})^2$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} x_i^2 & \sum_{i=1}^{8} x_i \\ \sum_{i=1}^{8} x_i & \sum_{i=1}^{8} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} \frac{x_i}{y_i} \\ \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{y_i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 382.34 & 47.2 \\ 47.2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.36 \\ 2.11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = \tilde{A}^{-1} \tilde{b}$$

$$d_1 = 0.0283$$

$$d_0 = 0.0963$$

$$f(x) = \frac{1}{0.0283x + 0.0963}$$

תרגיל [illegible] מצאו a,b $y_i \approx a e^{bx_i}$

x	0	$1/2$	1	1.5	2
y	1.1	1.4	1.3	2.3	3

(א) מצאו a,b בעזרת רגרסיה לינארית

(ב) הוכח ש-S מינימלי אם מתקיים $a \sum x_i e^{2bx_i} = \sum x_i y_i e^{bx_i}$

$$a \sum e^{2bx_i} = \sum y_i e^{bx_i}$$

פתרון

$$y_i \approx a e^{bx_i}$$

(א) נוציא $\ln$ לשני הצדדים:

$$\ln(y_i) = \ln(a e^{bx_i})$$

$$\ln(y_i) = \ln(a) + \ln(e^{bx_i})$$

$$\ln(y_i) = \tilde{a} + b x_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{5} (\hat{a} + bx_i - \ln(y_i))^2$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \hat{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i \ln(y_i) \\ \sum \ln(y_i) \end{pmatrix}$$

$$b = 0.5$$

$$a = 1.1$$

$$f(x) = 1.1 e^{\frac{x}{2}}$$

(ד)

$$S=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}(ae^{bx_i}-y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(ae^{bx_i}-y_i)e^{bx_i}=0$$

$$0=\sum(ae^{2bx_i}-y_ie^{bx_i})=0$$

$$\sum ae^{2bx_i}=\sum y_ie^{bx_i}$$

∎

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ae^{bx_i}-y_i)\,ax_ie^{bx_i}=0$$

$$0=\sum a^2e^{2bx_i}x_i-ay_ix_ie^{bx_i}$$

$$\sum a^2e^{2bx_i}x_i=\sum ay_ix_ie^{bx_i}\quad |:a\neq 0$$

$$\sum ax_ie^{2bx_i}=\sum y_ix_ie^{bx_i}$$

∎

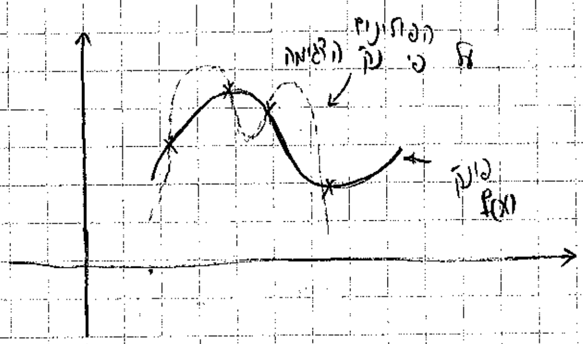
אינטרפולציה

x_0	x_1	---	x_n
y_0	y_1	---	y_n

דרך n+1 נק' דגימה

עובר פולינום מדרגה n

$$P_n(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$$



$$\forall i\quad P_n(x_i)=f(x_i)$$

מערכת משוואות ליניארית

$$\begin{cases}a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\dots+a_1x_0+a_0=f(x_0)\\ \vdots\\ a_nx_n^n+a_{n-1}x_n^{n-1}+\dots+a_1x_n+a_0=f(x_n)\end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n\end{pmatrix}}_{}\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x_0)\\ \vdots\\ f(x_n)\end{pmatrix}$$

n×n מלאה מט' רגילה

[illegible]

המטרה: למצוא $a_0,\dots,a_m$ אבל המטריצה מלאה ולכן יש חריקה

חישובים לעשות

נלמד אינטרפולציה של לגרנז'

<u>הגדרה</u>: אינטרפ' לגרנז' באמצעות n+1 פונק' בסיס שהם

פולינומים ממעלה 0 עד n נקראים אינטרפולציה פולינומית

<u>נשים לב</u>: אם יש n נק' דגימה → דרגת הפולינום

$m=n-1$

נגדיר פולינום אינט' של לגרנז'

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{m} f(x_i)\cdot L_i(x)$$

המשקולות של לגרנז' : $L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

<u>הערות</u>: ① כמה נקודות הדגימה, כך כמות L_i שצריך לחשב?

② $L_i(x)$ הם פונק' של x

③ מתקיים $\begin{cases} L_i(x_i)=1 \\ L_i(x_j)=0 \end{cases}$

נתונות: $\overset{x_1\ y_1}{(0,0)}$ $\overset{x_2\ y_2}{(1,1)}$ $\overset{x_3\ y_3}{(2,4)}$

$$L_1(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x_1-1)(x_1-2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(x_2-0)(x_2-2)}=\frac{(x-0)(x-2)}{-1}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(x_3-0)(x_3-1)}=\frac{(x-0)(x-1)}{2}$$

$$P_2(x)=L_1(x)y_1+L_2(x)y_2+L_3(x)y_3$$

דרגת הפולינום

$$P_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{2}y_1-x(x-2)y_2+\frac{x(x-1)}{2}y_3=-x(x-2)+2x(x-1)$$

$$P_2(x)=x^2$$

__הערה:__ אם $y_i=0$ לא צריך לחשב את $L_i(x)$
כי הפולינום מכפילים את $L_i(x)\cdot y_i$ וזה
מתאפס.

תרגול 7 - משפט השארית עבור אינטרפולציית לגרנז'

תהי f פונק' גזירה $n+1$ פעמים ותהי $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ סדרה של נקודות דגימה אזי פולינום האינטרפולציה $P_n(x)$ מקיים $P_n(x_i)=f(x_i) \quad \forall\, 0\le i\le n$

↓ דרגת הפולינום היא n

נקרב את הפונקציה $f(x)$ עם שגיאה:

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

שימו לב ש- $x_0,x_1,\dots,x_n$ אלו נקודות דגימה.

c שייך לקטע (x_0,x_n)

$$\text{error}(x)=|f(x)-P_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

1- כאשר X הוא לא נק' דגימה $M_{n+1}=\max\{f^{(n+1)}(c)\}$

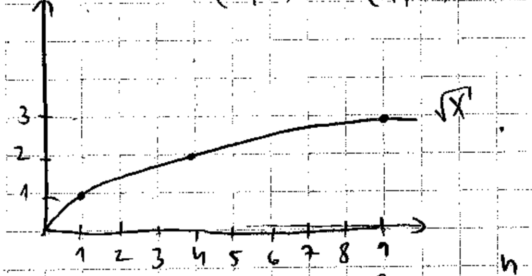
↓ $x_0\le c\le x_n$

2. אם מחשבים את השגיאה בנק' דגימה

כי בנקודת הדגימה השגיאה היא $\underline{\underline{0}}$

דוגמא: קרב את הפונק' $f(x)=\sqrt{x}$ בנק' $X=3$ עם 3 נק'

דגימה: $(1,1)$ $(4,2)$ $(9,3)$



תזכורת

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)f(x_i)$$

כאשר
$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$
↙ משקולות לגרנז'

יש 3 נק' דגימה ולכן פולינום האינטרפולציה של לגרנז' מדרגה 2:

$$L_1(x)=\frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$

$$P_2(x) = \overset{\overset{f(x_1)}{\downarrow}}{1}\cdot L_1(x) + 2\cdot L_2(x) + 3\cdot L_3(x)$$

$$P_2(x) = \dots = -\frac{x^2}{60} + \frac{5x}{12} + \frac{3}{15}$$

$$\text{error}(x) = |f(x) - P_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| = \frac{M_3}{3!}|(x-1)(x-4)(x-9)|$$

$$M_3 = \max_{1\le c\le 9} |f^{(3)}(c)|$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$|f^{(3)}(c)| = \left|\frac{3}{8}c^{-\frac{5}{2}}\right| \le \frac{3}{8}$$

פונק׳ מונוטונית יורדת

המקסימום מתקבל בקצה הש
שהוא $c=1$

$$\text{error}(x) = |f(x) - P_2(x)| \le \frac{\frac{3}{8}}{3!}|(x-1)(x-4)(x-9)|$$

תרגיל התבקשנו לקרב את הפונק׳ בנק׳ $x=3$

נמצא את הקירוב באמצעות פולינום האינטרפולציה

$$f(3) = \sqrt{3} \approx P_2(3) = -\frac{9}{60} + \frac{15}{12} + \frac{3}{15} = 1.3$$

נמצא את חסם השגיאה ב $x=3$

$$\text{error}(3) = |f(3) - P_2(3)| \le \frac{\frac{3}{8}}{3!}|(3-1)(3-4)(3-9)| = 0.75$$

נשים לב שבפועל

$$|\sqrt{3} - P_2(3)| \approx 0.032$$

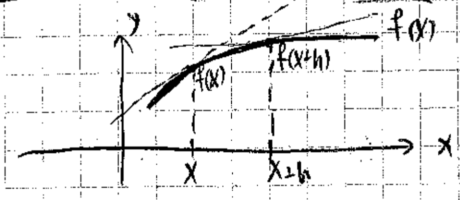
זאת השגיאה האמיתית

0.75 זה החסם לשגיאה ולכן הוא גדול יותר

הערה

יתרון של אינטרפולצית לגרנז׳: נשים לב ש- $L_i(x)$ לא תלויות בערכי הפונק׳ ($f(x_i)$) כלומר פולינום האינטרפולציה של לגרנז׳ מתאים להרבה פונקציות שאותן אנו דוגמים בנקודות $(x_i, f(x_i))$ (פולינום האינטרפולציה זהה לפונק׳ שונות)

חסרונות: בגלל שמוסיפים נקודת דגימה חדשה צריך לחשב את כל $L_i(x)$ מחדש



נגזרת נומרית

נרצה לחשב את $f'(x)$

נחפש קירוב ל-$f'(x)$ הנגזרת הנקודות $x+h$, x

נפתח את $f(x+h)$ ע' טור טיילור סביב הנק' שבה $x_0=x$

$$f(x+h)=f(x)+(x+h-x)\cdot f'(x)+(x+h-x)^2\frac{f''(c)}{2!}$$

$$f(x+h)=f(x)+h\underbrace{f'(x)}_{\text{נרצה לבודד את זה}}+h^2\frac{f''(c)}{2}$$

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h^2f''(c)}{2}=hf'(x) \quad |:h\neq0$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)-\frac{h^2f''(c)}{2}}{h}=\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{קירוב הנגזרת}}-\underbrace{\frac{hf''(c)}{2}}_{\text{שגיאת הקיטוע}}$$

(כי עצרנו בסדר 2)

מסומן E_T - ב

R_T - א

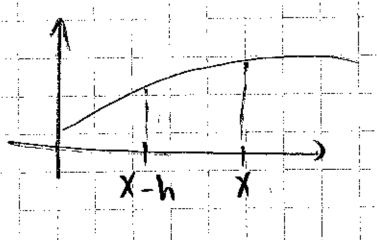
$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

זה נקרא הפרש קדמי (או נגזרת קדמית)

$$|E_T|=\left|-\frac{f''(c)}{2}h\right|\le\left|\max_{x\le c\le x+h}\left\{\frac{f''(c)}{2}\cdot h\right\}\right|\rightarrow \text{סדר}\cdot h^1$$

עקרון הפרש אחורי:

נבחר נוסחת גזירה לקרון הפרש אחורי (או נגזרת אחורית)



נפתח את $f(x-h)$ בעזרת טור טיילור סביב $x_0=x$

$$f(x-h)=f(x)+(x-h-x)f'(x)+(x-h-x)^2\frac{f''(c)}{2}$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+h^2\frac{f''(c)}{2}$$

נבודד את $f'(x)$

$$h\cdot f'(x) = f(x) - f(x-h) + h^2\frac{f''(c)}{2} \quad |: h\neq 0$$

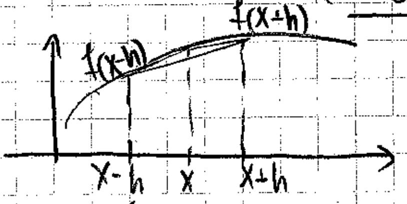
$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x-h)}{h}}_{\text{קירוב לנגזרת}} + \underbrace{\frac{h\, f''(c)}{2}}_{\text{שגיאת הקיטוע}}$$

הפרש אחורי (או נגזרת אחורית):

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{x}$$

$$|E_T| = \left|\frac{h\, f''(c)}{2}\right| \le \max_{x-h\le c< x}\left\{|f''(c)|\frac{h}{2}\right\} \to \text{קיטוע}\cdot h^1$$

הפרש מרכזי (או נגזרת מרכזית)



$x_0 = x$ סביב

נרצה שוב לחשב את $f'(x)$

נפתח את $f(x+h)$, $f(x-h)$

$$\circledast \quad f(x+h) = f(x) + (x+h-x)f'(x) + (x+h-x)^2\frac{f''(x)}{2} + (x+h-x)^3\frac{f'''(c_1)}{3!}$$

$$\text{I} \quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + h^3\frac{f^{(3)}(c_1)}{3!}$$

$$\circledast \quad f(x-h) = f(x) + (x-h-x)f'(x) + (x-h-x)^2\frac{f''(x)}{2} + (x-h-x)^3\frac{f^{(3)}(c_2)}{3!}$$

$$\text{II} \quad f(x-h) = f(x) - h f'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2} - h^3\frac{f^{(3)}(c_2)}{3!}$$

$$\text{I}-\text{II} \quad f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + h^3\frac{f^{(3)}(c_1)}{3!} + h^3\frac{f^3(c_2)}{3!}$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2f^3(c)h^3}{3!}$$

נקבל את $f'(x)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}_{\text{קירוב לנגזרת}} - \underbrace{\frac{f^3(c)\,h^2}{3!}}_{\text{שגיאות הקיטוע}}$$

<u>הערה:</u> קבלנו ש- $f(x)$ היא פונק' רציפה ניתן לכתוב את הסכו

$$f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2) = f^{(3)}(c_3)$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$|E_T|=\left|-h^2\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\right| \le \max_{x-h\le c\le x+h}\left\{\frac{|f^{(3)}(c)|}{3!}h^2\right\} \longrightarrow$$ קירוב · h^2

<u>הגדרה:</u> סדר קירוב של שיטה הוא p אם השגיאה $E(a)$ חסומה ע"י: $|E(a)|\le C\cdot h^p$

כאשר $\min_{i\ne j}|x_i-x_j|\le h\le \max_{i\ne j}|x_i-x_j|$

עבור נגזרת מרכזית: $p=2$

עבור נגזרת קדמית, נגזרת אחורית: $p=1$

<u>תרגיל</u>

עבור הפונק': $f(x)=x\sin(x)$ חשב את $\overset{\text{קירוב}}{\vee}$ הנגזרת בנק' $x=\frac{1}{2}$

עם צעדי בגדל $h=0.1$ ו- $h=0.01$

בעזרת הפרש קדמי ובעזרת הפרש מרכזי

<u>פתרון</u>

- הפרש קדמי:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\underset{h=0.1}{f'(0.5)}\approx\frac{f(0.6)-f(0.5)}{0.1}=0.9907$$

$$\underset{h=0.01}{f'(0.5)}\approx\frac{f(0.51)-f(0.5)}{0.01}=0.9527$$

(הערך האמיתי הוא 0.9182 אם לוקחים 4 ספרות עשרוניות אחרי הנקודה) כך ש- h קטן יותר הקירוב מתקרב לערך האמיתי.

- נגזרת מרכזית:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$\underset{h=0.1}{f'(0.5)}\approx\frac{f(0.6)-f(0.4)}{0.2}=0.9151$$

$$\underset{h=0.01}{f'(0.5)}\approx\frac{f(0.51-f(0.49)}{0.02}=0.9182 \longrightarrow$$ זהה לערך האמיתי! (4 ספרות אחרי הנקודה)

הגדרה: סדר דיוק אלגברי של נוסחאות קירוב היא הדרגה המקסימלית של פולינומים אלגבריים שעבורם נוסחאות הקירוב מדויקות כלומר השגיאה עבורם שווה ל-0

כלומר נוסחאות הקירוב $\underbrace{\tilde{f}'(a)}_{\text{ערך מקורב}}$ של $\underbrace{f'(a)}_{\text{ערך אמיתי}}$

היא בעלת סדר דיוק אלגברי r אם

$$\tilde{f}'(a) = f'(a)$$

לכל פולינום $f \in \overbrace{\Pi_r}^{\text{מרחב פולינומים מדרגה } r}$ וקיים פולינום $P_{r+1} \in \Pi_{r+1}$

שעבורו $\underbrace{\tilde{P}'_{r+1}(a)}_{\text{חישוב באמצעות קירוב}} \neq \underbrace{P'_{r+1}(a)}_{\text{חישוב נגזרת אמיתית של הפולינום}}$

נמשיך: סדר דיוק אלגברי של נוסחאות קירוב של נגזרת קד

נוסחה קדמית: $D_h = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

פולינום	נגזרת אמיתית	נגזרת לפי קירוב D_h	מסקנה
$P_0(x) = 1$	$P_0'(x) = 0$	$D_h = \frac{P_0(x+h) - P_0(x)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0$	$P_0'(x) = D_h$
$P_1(x) = x$	$P_1'(x) = 1$	$D_h = \frac{P_1(x+h) - P_1(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$	$P_1'(x) = D_h$
$P_2(x) = x^2$	$P_2'(x) = 2x$	$D_h = \frac{P_2(x+h) - P_2(x)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$	$P_2'(x) \neq D_h$

לכן סדר דיוק אלגברי של נוסחאות קירוב לנגזרת קדמית הוא $r = 1$

⊛ הראנו שעבור $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ נוסחת הקירוב לנגזר הקדמית שווה לנגזרת האמיתית עבור פולינומים אלו $P_1(x)$,

מכיוון ש- $1, x$ הם בסיס ליצירת פולינום כלשהו ממעלה

וכיוון שנגזרת זה אופרטור לינארי נקבל שלכל פולינום ממעלה ראשונה נוסחאות הקירוב היא מדויקת ← ההפרש ב

תוצאת הקירוב לתוצאה האמיתית הוא אפס.

* לבדוק לבד עבור נגזרת מרכזית *

h אופטימלי עבור קירובי נגזרות

כאשר אנו מקרבים נגזרות השגיאה שואפת לאפס כאשר h שואף לאפס ט שגיאות הקיטוע - האיבר בפיתוח השגיאה נותר שיעור מוכפל בחזקה כלשהי של h.

עבור הפרש קדמי (נגזרת קדמית) $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

סימונים: $x+h=x_1$, $f(x+h)=f_1$, $f(x)=f_0$, $f(x+2h)=f_2$

$$f'(x_0)=\frac{f_1-f_0}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)$$

נראה ט עדיף לבחור h כמה שיותר קטן כדי לקבל שגיאה קטנה כרצוננו

אבל זה לא (נכון- קטסטרופה) לגבי $f(x_0+h)$ שעבור h קטן מאוד $f(x_0+h)\to f(x_0)$ ולכן בקירוב הנגזרת אנו מחסירים בין 2 מספרים קרובים (מאוד) מה שגורם לשגיאות התבטלות תופעת ההתבטלות רע תתרחש בכל קירוב דיסקרטי של נגזרות.

מסקנה: צריך לבחור h קטן אבל לא קטן מידי => קיים h אופטימלי שמאפשר הכי טוב להקטין 2 סוגי שגיאות:

$\underbrace{\text{שגיאת קיטוע}}_{R_T}$ ו$\underbrace{\text{שגיאה נומרית}}_{R_N}$

תרגול 8

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

נראה שעדיף ש-h יהיה כמה שיותר קטן

ע"מ לקבל שגיאה כרצוננו

אך זה לא נכון - נשים לב כי קונסטו

עבור פונק' רציפה f(x) ו- $h \to 0$ מתקיים

$$f(x+h) \to f(x)$$

ולכן בקירוב הנגזרת אנו מחסירים בין 2 גורמים

קרובים מה שיכול להוביל לשגיאת התבטלות.

<u>מסקנה</u>: צריך לבחור h מספיק קטן אך לא

קטן מידי ⇐ קיים h אופטימלי שמאפשר בצורה

הטובה קיזוז בין 2 סוגי שגיאות: שגיאת

הקיטוע והשגיאה הנומרית (השגיאה בחישוב של

קירוב הפונקציה בנק' x)

את שגיאת הקיטוע נסמן ב- R_T שגיאה זו

קטנה ככל ש-h קטן

את השגיאה הנומרית נסמן ב- R_N או R_{XF}

שגיאה זו גדלה ככל ש-h קטן.

השגיאה הכוללת היא סכום של 2 השגיאות הנ"ל

$$R_{total} = R_N + R_T$$

<u>המטרה</u>: לבחור h שממזער את R_{total}

h זה סומן כ- h_{opt} (אופטימלי = opt)

השגיאה הכוללת היא פונק' של h ולכן ניתן למצוא

לה מינימום על ידי איפוס הנגזרת

$$R_{total} = R_N + R_T$$

$$R'_{total}(h_{opt}) = 0$$

<u>הערה</u>: תמיד ניקח את R_T ואת R_N להיות

חיוביים

דוגמא

בחר h אופטימלי והערך את השגיאה (המינימלית) בחישוב $f'(1)$

כאשר $f(x)=e^x$ באמצעות הפרש קדמי והפרש מרכזי

אם ערכי הפונק' מחושבים בדיוק של 6 ספרות משמעותיות

בשיטת עיגול

פתרון: $R_T = \max\limits_{x<c<x+h}\{|f''(c)|\cdot \frac{h}{2}\}$

הפרש קדמי: $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

הפרש מרכזי: $f'(x)\ \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ $\quad R_T = \max\limits_{x-h<c<x+h}\{|f^{(3)}(c)|\cdot \frac{h^2}{6}\}$

נתון שערכי f מחושבים עם דיוק של 6 ספרות משמעותיות

בשיטת עיגול ולכן: $|\Delta f| \le 0.5\cdot 10^{-5}$

$$|\Delta f| = |f(x)-\tilde{f}(x)| \le \varepsilon = 0.5\cdot 10^{-5}$$

נניח תמיד ש

$$|f(x)-\tilde{f}(x)| \le \varepsilon$$

בסביבה של x

כאשר $f(x)$ הוא הערך המדויק של הפונק', $\tilde{f}(x)$

הוא הקירוב של הפונק' בסביבת הנק' x.

$$R_N = \overline{D}_h(f) - D_h(f)$$

$$\overline{D}_h(f) = \frac{\hat{f}(x+h)-\tilde{f}(x)}{h} \qquad D_h(f) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$R_N = \overline{D}_h(f) - D_h(f) = \frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x) - (f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$= \left|\frac{\tilde{f}(x+h)-f(x+h)}{h} - \frac{\hat{f}(x)-f(x)}{h}\right| \underset{\text{אש״מ}}{\le} \frac{|\tilde{f}(x+h)-f(x+h)|}{h} +$$

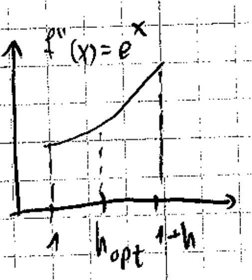
$$+ \frac{|\tilde{f}(x)-f(x)|}{h} = \frac{\varepsilon}{h}+\frac{\varepsilon}{h} = \frac{2\varepsilon}{h}$$

$$R_{total} = R_N + R_T = \frac{2\varepsilon}{h} + \max_{x<c<x+h}\{|f''(c)|\,\tfrac{h}{2}\}$$

נסמן $\max\{|f''(c)|\} = M$

$$R_{total} = \frac{2\varepsilon}{h} + M\cdot\frac{h}{2}$$

$R'_{total}(h) = -\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{M}{2} = 0$



$\Rightarrow \frac{M}{2} = \frac{2\varepsilon}{h} \Rightarrow h^2 = \frac{4\varepsilon}{M} \rightarrow h_{opt} \sqrt{\frac{4\varepsilon}{M}}$

$h_{opt} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}} = \frac{2\sqrt{0.5\cdot 10^{-5}}}{\sqrt{M}} = \frac{0.004}{\sqrt{M}}$

$R_{total}(h_{opt}) = \frac{2\varepsilon}{h_{opt}} + \frac{M\cdot h_{opt}}{2}$

$= \frac{\cancel{2}\varepsilon}{\frac{\cancel{2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{m}}} + \frac{m}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{m\,\varepsilon} = 2\sqrt{0.5\cdot 10^{-5}}\sqrt{M} = 0.004\sqrt{m}$

נמצא h_{opt} עבור הפרש מרכזי:

$R_T = \max_{x-h \le c < x+h} \{ |f^{(3)}(c)| \cdot \frac{h^2}{6} \}$

$R_N = \bar{D}_h(f) - D_h(f)$

$D_h(f) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ $\bar{D}h(f) = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h}$

$R_N = \frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

$= \frac{\tilde{f}(x+h) - f(x+h)}{2h} - \frac{(\tilde{f}(x-h) - f(x-h))}{2h}$

$\le \frac{|\tilde{f}(x+h) - f(x+h)|}{2h} + \frac{|\tilde{f}(x-h) - f(x-h)|}{2h} = \frac{\varepsilon}{2h} + \frac{\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}$

$\varepsilon = 0.5\cdot 10^{-5}$

$\Rightarrow R_{total} = R_N + R_T = \frac{\varepsilon}{h} + \max_{x-h < c < x+h} \{ |f^{(3)}(c)| \cdot \frac{h^2}{6} \}$

$\max_{x-h < c < x+h} \{ |f^{(3)}(c)| \} = M$ נסמן

$R_{total} = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M}{6} h^2$

$0 < h < h_{opt}$, $h_{opt} < h < \infty$

יש 2 תחומים בהם השגיאה תהיה גדולה מאוד.

$$R_{total} = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M \cdot h^2}{6}$$

$$R'_{total}(h) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{2}{6} M h = 0$$

$$\frac{Mh}{3} = \frac{\varepsilon}{h^2}$$

$$Mh^3 = 3\varepsilon$$

$$h^3 = \frac{3\varepsilon}{M} \rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}$$

$$h_{opt} = \frac{\sqrt[3]{3\varepsilon}}{\sqrt[3]{M}} = \frac{0.0246}{\sqrt[3]{M}}$$

$$R_{total}(h_{opt}) = R_N(h_{opt}) + R_T(h_{opt}) = \frac{\varepsilon}{h_{opt}} + \frac{M}{6} \cdot h_{opt}^2$$

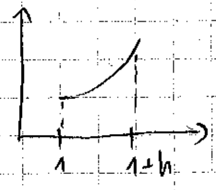
$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}} + \frac{M}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M}}\right)^2 = \frac{M^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} + \frac{M}{6} \frac{3^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}}{M^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{M^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} + \frac{M^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}}{6}$$

$f''(x) = e^x$

לא ניתן להעריך את M

כי $f''(x)$ מונוטונית עולה



הערה

הפרש קדמי $R_{total} = \frac{\varepsilon}{2h} + \frac{M h}{2} = g_1(h)$

הפרש מרכזי $R_{total} = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M}{6} h^2 = g_2(h)$

יש לנו $g_1(h)$ ו- $g_2(h)$, שלהן השגיאות המוחלטות לכל

מקרה: גדולות מאוד בשני אקסטרימים: עבור h מאוד

קטן, h מאוד גדול.

$$g(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \infty$$

$$g(h) \xrightarrow[h \to \infty]{} \infty$$

לכן קיימים $0 < h < h_{opt}$

$h_{opt} < h < \infty$

השגיאה המוחלטת גדולה קיצונית.

נוסחה לנגזרת שניה ע"י חישוב $f(x+h)$, $f(x-h)$

מטור טיילור:

$$① \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2!} + \frac{f^{(3)}(c_1)h^3}{3!}$$

$$② \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2!} - \frac{f^{(3)}(c_2)h^3}{3!}$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)\cdot h^2 + \underbrace{\left(\frac{f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2)}{3!}\right)h^3}_{\frac{f^{(3)}(c)}{3!}h^3}$$

$x-h<c<x+h$

$$f(x-h) + f(x+h) - 2f(x) = f''(x)h^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}h^3$$

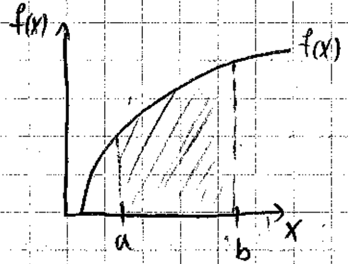
נגזרת שניה

$$\underbrace{\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}_{\text{קירוב לנגזרת}} - \underbrace{\frac{f^{(3)}(c)}{3!}h}_{\text{שגיאת הקיטוע } R_T} = f''(x)$$

אינטגרציה נומרית

כלל טרפז פשוט:

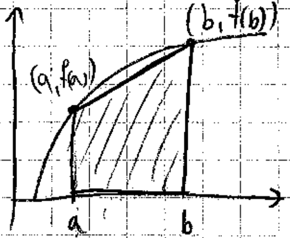
$$\int_a^b f(x)\,dx = I(f)$$



שטח האינטגרל $I(f)$

כלל טר / פשוט

$$\tilde{I}(f) = \overbrace{\frac{f(a)+f(b)}{2}}^{\text{סכום בסיסים חלקי 2}}\overbrace{(b-a)}^{\text{גובה הטרפז}}$$



שטח הטרפז $\tilde{I}(f)$

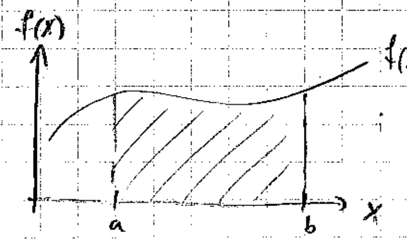
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

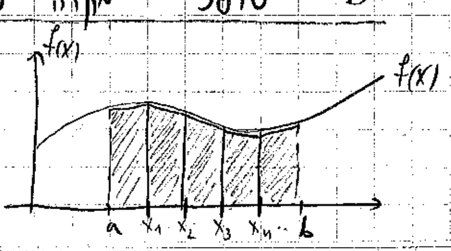
$$\underset{\text{השגיאה}}{E} = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \tilde{I}(f)\right| \leq \frac{h^3}{12}\cdot\max_{c\in[a,b]}\{|f''(c)|\}$$

$h = b-a$

סדר שיטה עבור כלל טרפז פשוט, $p=3$ ס השגיאה חסומה ע"י קבוע כפו

כלל טרפז מקרה כללי





מחלקים קטע a ל-b ל-n קטעים שווים ועל כל קטע משתמשים בכלל הטרפז הפשוט.

$h=\frac{b-a}{n}$ ← גודל צעד
(המרחק בין 2 נקודות)

נק' סריג:

$x_i=a+ih$

כאשר $i=0,\dots,n$

$x_0=a \quad x_n=b$

סה"כ $n+1$ נקודות

$$x_1=a+h \qquad x_2=a+2h \qquad \dots \qquad x_n=a+nh=a+n\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{h}=b$$

נפעיל כלל טרפז הפשוט על כל קטע

$$(x_0,x_1):\quad \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot h$$

$$(x_1,x_2):\quad \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot h$$

$$\vdots$$

$$(x_{n-2},x_{n-1}):\quad \frac{f(x_{n-2})+f(x_{n-1})}{2}h$$

$$(x_{n-1},x_n):\quad \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\dots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right]h+\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]h+\dots+\left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]h$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)+f(b)\right]=\underset{\text{כלל טרפז מורחב}}{\tilde{I}(f)} \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

$$E_n=\left|\int_a^b f(x)\,dx-\tilde{I}(f)\right|\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot\max_{c\in[a,b]}\{|f''(c)|\}=\underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2}_{h^2}\cdot\frac{b-a}{12}\cdot\max\{|f''(c)|\}$$

שגיאה כתלות במספר הקטעים n

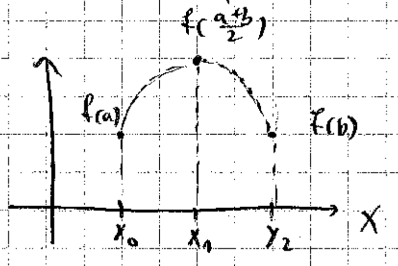
$$=h^2\,\frac{b-a}{12}\max\{|f''(c)|\}$$

כלל סימפסון מקרה פשוט

$x_0 = a$

$x_1 = \frac{a+b}{2}$

$x_2 = b$



נבנה פולינום אינטרפולציה של לגרנג' שעובר דרך הנק'

$(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$

הפולינום המתקבל הוא מדרגה 2 (כי יש 3 נק' דגימ

← פרבולה. נעשה אינטגרציה לפולינום האינטרפולציה

בקטע $[a, b]$

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$h = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

גודל צעד

סימפסון פשוט

$$\hat{I}_S(f) = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = \frac{\frac{b-a}{2}}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \leftarrow$$ [illegible]

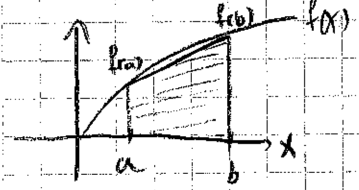
$$E = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \hat{I}(f)\right| \le \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \max_{c\in[a,b]}\{|f^{(4)}(c)|\} = \frac{h^5}{90}\max\{|f^{(4)}(c)|\} \le Mh^5$$

סדר השיטה הוא 5

תרגול 9

אינטגרציה נומרית

* כלל טרפז פשוט:



$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right](b-a)$$

$$|E| \le \frac{h^3}{12} \max_{a\le c\le b} |f''(c)|$$

יש שגיאה מקומית, במעבר מ-x_n ל-x_{n+1}

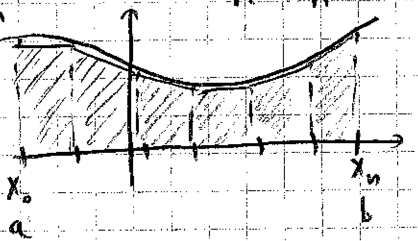
והיא חסומה ע"י $\frac{h^3}{12}M$ כאשר $M=\max\limits_{a\le c\le b}|f''(c)|$

* כלל טרפז מורחב

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{f(a+ih)}_{f(x_i)}+f(b)\right]$$

$x_i=a+ih$ נקודות עם הפרש קבוע $i=0,..,n$

$h=\frac{b-a}{n} \leftarrow h=\frac{b-a}{n}$



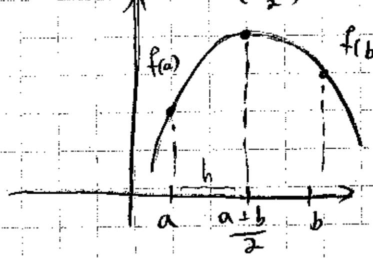
$$E_n \le \underset{\text{מס' הקטעים (מס' הטרפזים)}}{n} \cdot \underbrace{\frac{h^3}{12}\max_{a\le c\le b}|f''(c)|}_{\text{שגיאה של כל טרפז}}$$

$$E_n \le n\cdot\frac{h^3}{12}\cdot M = \frac{b-a}{h}\cdot\frac{h^3}{12}M = \frac{(b-a)h^2}{12}M = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

הגדרה: סדר השיטה של כלל טרפז פשוט (מקומי, במעבר מ-x_n ל-x_{n+1}) הוא p כאשר $|E|\le \underset{\text{קבוע}}{C}\cdot h^p$

בכלל טרפז פשוט $p=3$. אך בכלל טרפז מורחב סדר השיטה $p=2$ כי $E_n\le\frac{(b-a)h^2}{12}M$ וזה נקבע מכיוון שהשגיאה הכוללת היא סכום של שגיאות מקומיות מ-X_0 עד X_n

* כלל סימפסון פשוט



$A\ (a, f(a)$

$B\ (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$

$C\ (b, f(b))$

$h=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$

נעביר את פולינום האינטרפולציה של לגרנג' שעובר דרך A,B,C שדרגתו 2, נסמנו ב-$P_2(x)$ ונחשב את האינטגרל $\int_a^b P_2(x)dx$

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{2} \Rightarrow \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

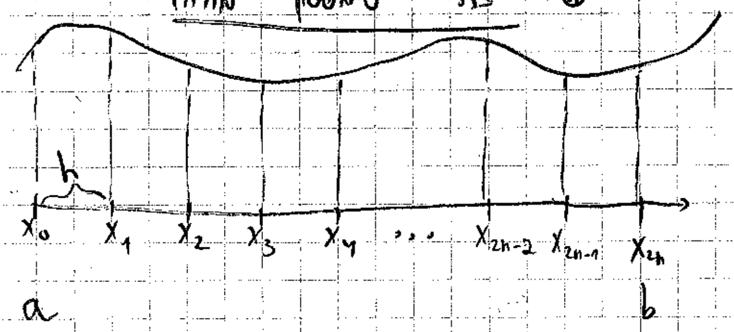
$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

סדר של
אחרי 3
משקלל כולם
נוכיח יותר משקלל ל-B

$$|E| \le \frac{1}{90}\cdot\underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}_{h}\cdot \max_{a\le c\le b}|f^{(4)}(c)| = \frac{1}{90}h^5 M$$

⇐ סדר השיטה של כלל סימפסון פשוט הוא $p=5$

⊛ כלל סימפסון מורחב



$$h=\frac{b-a}{2n}$$

$$n=\frac{b-a}{2h}$$

נשתמש בכלל סימפסון פשוט על כל שלשה סמוכות :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \underbrace{\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx}_{\text{(סגור זה כלל סימפסון}} + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2h-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

$$+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

$$+ \vdots$$

$$+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})]$$

סכום

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\dots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right]$$

$$|E_n| \le \overset{\swarrow}{n}\cdot\underbrace{\frac{h^5}{90}M}_{\text{שגיאה}} = \frac{b-a}{2h}\frac{h^5}{90}M = \frac{(b-a)h^4}{180}M = \frac{b-a}{180}\cdot\left(\frac{b-a}{2h}\right)^4\cdot M = \frac{(b-a)^5}{2^4\cdot 180\cdot h^4}M$$

מה הקודם) שהמספר
כי כל סימפסון

לכל קטע
מקורי

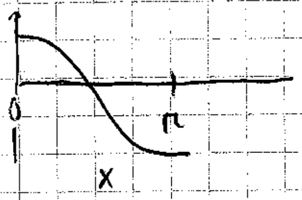
$$|E_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880\, n^4}M$$

⇐ סדר השיטה של כלל סימפסון הוא
$p=4$

⊛ **תרגיל**

חשב את האינטגרל בשיטת טרפז עם $h=\pi$, $h=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\,dx$$



פתרון

מהגדרה: $h=\frac{b-a}{n}$

עבור $h=\pi$:

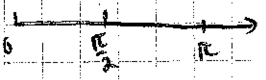
$h=\frac{\pi-0}{n}\underset{\text{נתון}}{\uparrow}=\pi \Rightarrow n=1$ ← קטע 1

(כלומר יש לנו טרפז הפשוט)

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\,dx \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]=\pi\left(\frac{f(0)+f(\pi)}{2}\right]=\frac{\pi}{2}\left[1+-e^{\pi}\right]=-34.779$$

עבור $h=\frac{\pi}{2}$:

$h=\frac{\pi-0}{n}\overset{\text{נתון}}{\downarrow}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow n=2$



לכן יש 2 קטעים

ונשתמש בטרפז מורחב

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(0)+2f(\tfrac{\pi}{2})+f(\pi)\right]=\frac{\pi}{4}\left[1+2\cdot 0-e^{\pi}\right]=\frac{\pi}{4}\left[1-e^{\pi}\right]=-17.38$$

⊛ **תרגיל**

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sin(x)}\,dx$$

חשב

בעזרת כלל סימפסון

(א) עבור $h=1$

(ב) עבור $h=2$

$h=\frac{b-a}{2\underset{\text{מס' החלוקות}}{n}}$

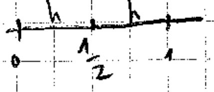
פתרון

(א) נשים לב: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin(x)}=0$ (אין סינגולריות ב-0)

עבור $h=1$:

$h=\frac{b-a}{2}$ יש רק 2 קטעים

ולכן נעזר בכלל סימפסון הפשוט



$h=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sin(x)}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(0)+4f(\tfrac{1}{2})+f(1)\right]=\frac{1}{6}\left[0+4\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\underset{\text{ברדיאנים}}{\sin(\frac{1}{2})}}+\frac{1}{\sin(1)}\right]=0.5457$$

(ב) עבור $h=2$ $h=\frac{b-a}{4}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$ יש 4 קטעים ולכן נעזר בכלל סימפסון הפשוט פעמיים

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sin(x)}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(0)+4f(\tfrac{1}{4})+2f(\tfrac{1}{2})+4f(\tfrac{3}{4})+f(1)\right]=\frac{1}{12}\left[0+\frac{\frac{1}{4}}{\sin(\frac{1}{4})}+\frac{\frac{1}{2}}{\sin(\frac{1}{2})}+\frac{\frac{9}{4}}{\sin(\frac{3}{4})}+\frac{1}{\sin(1)}\right]=0.5452$$

תרגיל ⊛

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1.25=\frac{5}{4}$
$f(x)$	0.5	0.707	0.866	1	1.118

חשב את האינטגרל ע"פ כלל סימפסון

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} f(x)\,dx$$

פתרון

נחשב את h:

$$h=\frac{b-a}{2n}$$

$$=\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}{2n}=\frac{1}{2n}=\frac{1}{4}$$

$\Leftarrow n=2 \Leftarrow$ נפעל כלל סימפסון מורחב

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(\tfrac{1}{4})+4f(\tfrac{1}{2})+2f(\tfrac{3}{4})+4f(1)+f(\tfrac{5}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{12}\left[0.5+4\cdot 0.707+2\cdot 0.866+4\cdot 1+1.118\right]=0.848107$$

הגדרה

סדר דיוק אלגברי של נוסחת קירוב (למשל של אינטגרל או נגזרת) הוא המעלה המקסימלית של פולינומים אלגבריים שעבורם הנוסחה מדויקת. כלומר זו המעלה המקסימלית של הפולינומים שעבורם שגיאות הקירוב היא אפס

דוגמא: נמצא את סדר הדיוק האלגברי של כלל טרפז הפשוט

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \qquad \tilde{I}(f):=(b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

$P_n(x)$	$I(P_n)$	$\tilde{I}(P_n)$	
$P_0(x)=1$	$\int_a^b 1\,dx=b-a$	$(b-a)\left(\frac{P_1(a)+P_1(b)}{2}\right)=(b-a)\left(\frac{1+1}{2}\right)=b-a)$	מדויק
$P_1(x)=X$	$\int_a^b X\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}$	$(b-a)\left(\frac{P_1(a)+P_1(b)}{2}\right)=(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2}$	מדויק
$P_2(x)=X^2$	$\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3-a^3}{3}$	$(b-a)\left(\frac{P_2(a)+P_2(b)}{2}\right)=(b-a)\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)=\frac{b^3+ba^2-ab^2-a^3}{2}$	לא מדויק

לכן סדר הדיוק של כלל טרפז הפשוט הוא 1

כי הוא מדויק עד פולינומים ממעלה 1

עבור כלל סימפסון נחשב את סדר הדיוק האלגברי

$P_n(x)$	$I(P_n)$	$\tilde{I}(P_n)$	
$P_1(x)=1$	$\int_a^b 1\,dx=b-a$	$\frac{h}{3}\left(P_0(a)+4P_0(\frac{a+b}{2})+P_0(b)\right]=\frac{h}{3}[1+4\cdot1+1]=\frac{h}{3}\cdot6=2h=\frac{2\cdot(b-a)}{2}$	מדויק
$P_1(x)=X$	$\int_a^b X\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}$	$\frac{b-a}{6}\left[P_1(a)+4P_1(\frac{a+b}{2})+P_1(b)\right]=\frac{b-a}{6}[a+2a+2b+b]=\frac{b^2-a^2}{2}$	מדויק
$P_2(x)=X^2$	$\int_a^b X^2\,dx=\frac{b^3-a^3}{3}$	$\frac{b-a}{6}\left[P_2(a)+4P_2(\frac{a+b}{2})+P_2(b)\right]=\frac{b-a}{6}\left[a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right]=\frac{b^3-a^3}{3}$	מדויק
$P_3(x)=X^3$	$\int_a^b x^3\,dx=\frac{b^4-a^4}{4}$	$\frac{b-a}{6}\left[P_3(a)+4P_3(\frac{a+b}{2})+P_3(b)\right]=\frac{b-a}{6}\left[a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right]=\frac{b^4-a^4}{4}$	מדויק
$P_4(x)=x^4$	$\int_a^b X^4\,dx=\frac{b^5-a^5}{5}$	$\frac{b-a}{6}\left[P_4(a)+4P_4(\frac{a+b}{2})+P_4(b)\right]=\frac{b-a}{6}\left[a^4+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+b^4\right]=\dots\ \frac{a^4b}{24}-\frac{5}{24}a^5-\frac{1}{12}a$ $+\frac{1}{12}a^2b^3-\frac{1}{24}ab^4$ $+\frac{5}{24}b^5$	לא מדויק

<= סדר דיוק אלגברי של כלל סימפסון פשוט הוא 3

(א) חשב את האינטגרל בעזרת כלל סימפסון, $h=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 e^{x^2}dx$

(ב) הערך את ϵ_n

פתרון

(א)

$$\frac{1}{2}=h=\frac{b-a}{2n}=\frac{1-0}{2n}$$

<= $n=1$ נפעיל את כלל סימפסון פשוט פעם 1

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\approx\frac{h}{3}\left[f(0)+4f(\tfrac{1}{2})+f(1)\right]=\frac{1}{6}\left[1+4e^{\frac{1}{4}}+e\right]=1.475$$

(ב)

$$|\epsilon_n|\le\frac{h^5}{90}\cdot\max_{0\le c\le1}|f^{(4)}(c)|$$

$$f(x)=e^{x^2}\qquad f^{(1)}(x)=2xe^{x^2}\qquad f^{(2)}=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$$

$$f^{(3)}(x)=4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}\qquad f^{(4)}(x)=12e^{x^2}+24x^2e^{x^2}+24x^2e^{x^2}+16x^4e^{x^2}=$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x)=12e^{x^2}+48x^2e^{x^2}+16x^4e^{x^2}$$

מונוטונית עולה ולכן מקבלת מקסימום ב- $x=1$ $\qquad f^{(4)}(1)=76e$

$$|\epsilon_n|\le\frac{h^5}{90}\cdot f^{(4)}(1)=\frac{(\frac{1}{2})^5}{90}\cdot76e$$

תרגול 10

מד"ר נומרי

נתייחס למד"ר מסדר 1

$$\begin{cases} ①\ y'(x) = f(x, y(x)) \\ ②\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $x \in [a,b]$, y_0 ת"ה למד"ר

במקרים רבים לא ניתן לחשב פתרון מדויק למשוואה ①
אנו מסתפקים בחישוב ערכים המקרבים את ערכי הפתרון
ברשת צפופה של נקודות בתחום $[a,b]$ בו המשוואה
מתקיימת.

על מנת לקרב את הפתרון נפרוש רשת של נקודות
במרחקים קבועים עם גודל צעד h , המרחקים הם h צ"ר
ו- h הוא צעד קטן. נסמן את הנקודות הנ"ל

$$x_i = x_0 + ih \qquad i = 0,1,\ldots \qquad h = \frac{b-a}{h}$$

$$x_{i+1} = x_0 + ih + h = x_i + h$$

ניתן לקבל שיטת קירוב למשוואה ① ע"י החלפת הנגזרת
בקירוב שלה

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i+h) - y(x_i)}{h} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

נציב את הקירוב לנגזרת במשוואה ① ונקבל:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i))$$

נסמן $y(x_i) = y_i$, y_i קירוב ל- $y(x_i)$.

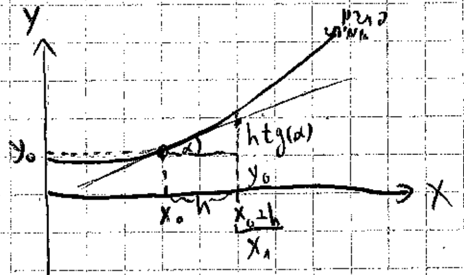
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} - y_i = h f(x_i, y_i)$$

קיבלנו

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \end{cases} \leftarrow \text{סכמת אוילר, E.}$$

עם תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$ הנתון במשוואה ② כך החלפנו את המד"ר הנתו
שימו לב ששיטת אוילר הנה שיטה מפורשת - הצעד הבא תלוי רק בצעד ה



רוצים למצוא את $y(x_1)$ ואנו
יודעים רק.
מעבירים משיק ל-$y(x)$ בנקודה x_0
ומחפשים את ערך של המשיק
בנקודה x_1

$$y(x_0+h) = y(x_1) = y_0 + h\,tg(\alpha) = y_0 + h y'(x_0)$$

$$y(x_1) = y_0 + h f(x_0, y(x_0))$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y(x_i))$$

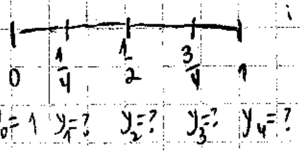
<u>דוגמא</u>

נתונה המד"ר הבאה

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x-y}{2} \quad , \quad x \in [0,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

מצא את $y(1)$ עבור $h=0.25$ בעזרת שיטת F.E

<u>פתרון:</u>



$$f(x,y) = \frac{x-y}{2}$$

$$y(1) = y(x_4) = y_4 = ?$$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0.25 \cdot \frac{0-1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \approx 0.875 = y(\tfrac{1}{4})$$
$(x_0 = 0 \quad y_0 = 1)$

$$y_2 = \underset{\frac{7}{8}}{y_1} + h f(\underset{\frac{1}{4}}{x_1}, y_1) = \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{7}{8}}{2} = \frac{51}{64} \approx 0.7969 = y(\tfrac{1}{2})$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = \frac{51}{64} + \frac{1}{4} f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{51}{64}) = \frac{51}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{51}{64}}{2} = 0.7598 = y(\tfrac{3}{4})$$

$$y_4 = y_3 + h(x_3, y_3) = 0.7598 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - 0.7598}{2} = 0.7586 = y(1)$$

<u>סכימת Backward Euler אויילר אחורי</u>

דומה לשיטת F.E רק ש B.E מקרב את הנגזרת ע"י הפרש אחורי

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(x) \approx \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i+1} - h)}{h} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

לפ הגדר׳, $y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

שיטת B.E $\quad y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}) \; \otimes \end{cases}$$

זוהי שיטה סתומה
כי הנעלם y_{i+1}
נמצא גם בצד שמאל
וגם בצד ימין

שימו לב ששיטת B.E הינה שיטה סתומה כיוון שהנעלם y_{i+1} מופיע בשני צידי המשוואה ולכן כדי למצוא את y_{i+1} נצטרך לבודד אותו מתוך ⊗ בכל איטרציה

דוגמא

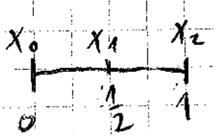
$y'(x) = -y^2 \qquad X = [0,1]$

$y(0) = 1$

עבור $h = 0.5$ מצא $y(1)$ בעזרת שיטת B.E

פתרון

$f(x,y) = -y^2$



$y(0)=1 \quad y_1=? \quad y(x_2)=y_2=?$

$y_1 = y_0 + h f(x_1, y_1) = 1 + \frac{1}{2} f(\frac{1}{2}, y_1)$

$y_1 = 1 + -\frac{y_1^2}{2} \quad | \cdot 2$

$y_1^2 + 2y_1 - 2 = 0$

$y_1 = 0.7321 \qquad y_1 = -2.7321$

$\downarrow$

נבחר את זה

הערה: נבחר את y_1 הערך המתאים שקרוב לערך של y_0

$y_2 = y_1 + h f(x_2, y_2) = 0.7321 + \frac{1}{2} f(1, y_2) = 0.7321 + -\frac{y_2^2}{2}$

$y_2^2 + 2y_2 - 1.4641 = 0$

$y_2 = 0.5698 \qquad y_2 = -2.5698$

$\downarrow$

ניקח את זה

המשך תרגול 10 נומרית

נוסחת Runge-Kutte סדר 2

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נוסחה של רונגה קוטה סדר 2

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + K_2 \\ K_1 = h f(x_n, y_n) \\ K_2 = h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) \end{cases}$$

דוגמא

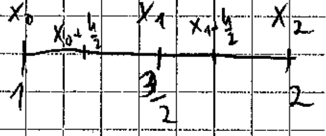
$$\begin{cases} y' = \frac{-y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad x \in [1,2]$$

מצא את $y(2)$ בקירוב שיטת R.K סדר 2 , $h=0.5$

פתרון

$f(x,y) = -\frac{y}{x}$

$y(2) = ?$



$y_0 = y(1) = 1 \qquad y_1 \qquad y_2 = ?$

$y_1 = y_0 + k_2$

$k_1 = h f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{y_0}{x_0}\right) = -\frac{1}{2}$

$K_2 = h f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot f(1 + \frac{1}{4}, 1 + -\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3/4}{5/4}\right) = -\frac{3}{10}$

$\Rightarrow y_1 = y_0 + k_2 = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$y_2 = y_1 + k_2$

$K_1 = h f(x_1, y_1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{y_1}{x_1}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{7/10}{3/2} = -\frac{7}{30}$

$K_2 = h f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1}{2}) = \frac{1}{2} f(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}, \frac{7}{10} + -\frac{7}{60}) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{35/60}{7/4}\right) = \frac{-70}{420} = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow y_2 = y_1 + k_2 = \frac{7}{10} - \frac{1}{6} = \frac{42}{60} - \frac{10}{60} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$

פתרון א.ס.ד.

$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = -\ln x + c_1 \quad | e^{()} \quad \rightarrow y(1) = \frac{\hat{k}}{1} = 1 \Rightarrow \hat{k} = 1$

8

קיבלנו $y(2)=\frac{1}{2}$ (פתרון אמיתי)

$y(2) \approx 0.5333$

הקירוב על ידי סכמת R.K מסדר 2

ניתן לראות שקירוב ע״י סכמת R.K מסדר 2 קרוב לפתרון האמיתי.

הערות לגבי סכמת R.K מסדר 2:

לכל איטרציה החישוב של k_1,k_2, k_1 ו- k_2 **מתעדכנים**

k_1, k_2 מחושבים בכל איטרציה מחדש

①

תרגול 11

שיטת רונגה קוטה מסדר 4

קונספט דומה לשיטות רונגה קוטה מסדר 2 - (נימן)

לבנות סכימה R.G מסדר 4 קונספט הבא

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

R.G מסדר 4

$$y_{n+1} = y_n + \underbrace{\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}_{\text{ממוצע של השיפועים}}$$

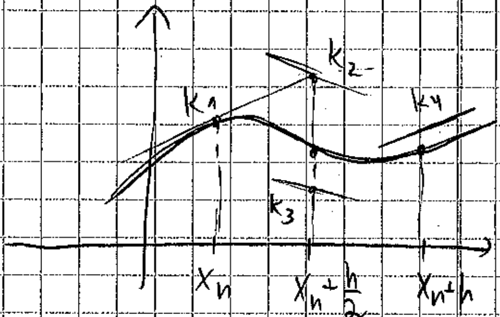
$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$



תרגיל

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + \sin(t) \quad (\text{rad}) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

נתון ש- $h = \frac{1}{2}$ מצאו את $y(1)$ ע"פ שיטת R.G מסדר 4

פתרון

$t_0 = 0$ $t_1 = \frac{1}{2}$ $t_2 = 1$

0 $\frac{1}{2}$ 1

$y(t_0) = y_0 = 1$ $y(t_1) = y_1$ $y(t_2) = y_2$

$$y(t_1) = y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(t_0, y_0) = \frac{1}{2} f(0, 1) = \frac{1}{2}(-y(0) + \sin(0)) = -\frac{1}{2}$$

$$k_2 = h f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_1}{2}) = \frac{1}{2} f(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) = \frac{1}{2}(-\tfrac{3}{4} + \sin(\tfrac{1}{4})) = -0.2513$$

$$k_3 = h f(t_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_2}{2}) = \frac{1}{2} f(\tfrac{1}{4}, 1 - \tfrac{0.2513}{2}) = -0.3135$$

$$k_4 = h f(t_0 + h, y_0 + k_3) = \frac{1}{2} f(0.5, 1 - 0.3135) = \frac{1}{2}(-0.6865 + \sin(\tfrac{1}{2})) = -0.1038$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(-\tfrac{1}{2} + 2\cdot(-0.2513) + 2(-0.3135) + -0.1038) = 0.7111$$

$$y(1)=y_2=y_1+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

$$k_1=h\,f(t_1,y_1)$$

$$k_2=h\,f\left(t_1+\frac{h}{2},\,y_1+\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3=h\,f\left(t_1+\frac{h}{2},\,y_1+\frac{k_2}{2}\right.$$

$$k_4=h\,f(t_1+h,\,y_1+k_3)$$

$$k_1=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2},0.7111\right)=\frac{1}{2}\left(-0.7111+\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)=-0.1159$$

$$k_2=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4},0.7111-\frac{0.1159}{2}\right)=0.0142$$

$$k_3=h\,f\left(t_1+\frac{h}{2},y_1+\frac{k_2}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4},0.7111+\frac{0.0142}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-0.7182+\sin\left(\frac{3}{4}\right)\right)=0.0183$$

$$k_4=h\,f(t_1+h,y_1+k_3)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2},0.7111+-0.183\right)=\frac{1}{2}(-0.6928+\sin(1))=0.0743$$

$$y_2=y_1+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=0.7111+\frac{1}{6}(-0.1159+2(0.0142)+2(0.0183)+0.0743)=0.7028$$

יציבות של סכמה נומרית

נתון קמ״ד
$$\begin{cases} y'=\lambda y & ① \\ y(x_0)=y_0 & ② \end{cases}$$
שבו רק ש-λ יכול להיות מרוכב

נרשום את הסכימה הנ״ל בעזרת לבעיה שהגדרנו (①+②) בקצרה

$$y_{n+1}=g(\lambda h)\,y_n$$

__הגדרה:__ סכימה נקראת יציבה חזק אם $|g(\lambda h)|<1$

$$\begin{cases} y'=\lambda y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}\Rightarrow y(x) \qquad \begin{cases} y'=\lambda y \\ y(x_0)=\tilde{y}_0 \end{cases}\Rightarrow \tilde{y}(x)$$

שינוי קל בתנאי התחלה

נדרש הסכימה יציבה $\tilde{y}(x)$ קרוב ל $y(x)$.

נבחן יציבות של סכמת F.E
אוילר קדמי

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n) \\ x_{n+1}=x_n+h \end{cases}$$

__אם__
$$\begin{cases} y'=\lambda y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}\Leftarrow f(x,y)=\lambda y$$

$$y_{n+1}=y_n+h\,f(x_n,y_n)=y_n+h\cdot\lambda y_n$$

$$y_{n+1}=(1+\lambda h)y_n \underset{\text{[illegible]}}{\Rightarrow} g(\lambda h)=1+\lambda h$$

נבדוק עבור הסכימה הנומרית של FE מתי היא יציבה חזק. לפי ההגדרה צריך לבדוק מתי $|g(\lambda h)|<1$

②

$$|1+\lambda h| < 1$$

$$-1 < 1+\lambda h < 1$$

$$-2 < \lambda h < 0$$

<u>עבור $\lambda<0$</u> :

$$0 < h < -\frac{2}{\lambda}$$

קיבלנו הגבלה על גודל הצעד h שאנחנו יכולים לבחור כדי שהסכימה תהיה יציבה. זוהי מגבלה חמורה על גודל צעד h במיוחד עבור λ שלילי גדול

שימו לב: תחום היציבות $|1+\lambda h| < 1$

נסמן $z = \lambda h$, $\lambda\in\mathbb{C}$ $\Leftarrow$ $|1+z| < 1$ $\leftarrow$ מעגל שמרכזו ב $(-1,0)$ ורדיוס 1

זה תחום היציבות של סכימת F.E הוא מעגל שמרכזו ב $(-1,0)$ ורדיוס 1

מכיוון שיש מגבלה על גודל צעד h יש צורך לפתח סכימות סתומות. תנאי היציבות עבור סכימות סתומות הוא הרבה פחות חמור בהשוואה לתנאי היציבות של סכימות מפורשות של FE.

יציבות של סכימת אוילר אחורית

BE
Backward Euler
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

נבדוק מתי הסכימה BE יציבה עבור

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow f(x,y) = \lambda y$$

צריך לקבל את $y_{n+1} = g(\lambda h) y_n$. סכימה שבה $|g(\lambda h)| < 1$ יציבה [illegible]

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h} y_n$$

$$\Rightarrow g(\lambda h) = \frac{1}{1-\lambda h}$$

נדרוש $|g(\lambda h)| < 1$ ונקבל:

$$\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right| < 1$$

$$\frac{1}{|1-\lambda h|} < 1 \Rightarrow 1 < |1-\lambda h|$$

עבור $\lambda<0$ ו $|1-\lambda h|>1$ תמיד ולכן סכמת BE

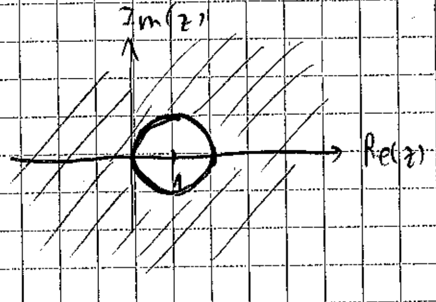
עבור $\lambda<0$ יציבה חזק לכל h (אין הגבלה על h)

נתבונן בתחום היציבות

$$|1-\lambda h|>1$$

נסמן $z=\lambda h$

$$|1-z|>1$$



מייצג חוץ של מעגל שמרכזו ב $(1,0)$ ורדיוסו 1

תרגיל

$$\begin{cases} y'=-y(t) & t\in[0,T] \\ y(0)=1 \end{cases}$$

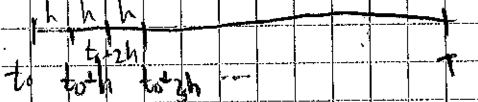
א) הפתרון האנליטי של המד"ר הזה ידוע ושווה $y(t)=e^{-t}$

הוכח שהקירובים ל-$y(t)$ שמקבלים ע"י סכמת F.E נתון ע"י

הנוסחא (הקירוב): $y_{n+1}=(1-h)^{n+1}$

כאשר h גודל צעד קבוע כך שמתקיים $t=0,\dots,\underbrace{nh}_{T}$

$h=\frac{T-0}{n}$



$$\begin{cases} t_i=t_0+ih \\ t_0=0 \end{cases} \Rightarrow t_i=ih$$

פתרון

$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n)$; $f(t,y)=-y$

$y_{n+1}=y_n-hy_n=(1-h)y_n$

$$y_{n+1}=(1-h)y_n=(1-h)(1-h)y_{n-1}=\dots=(1-h)^{n+1}\underbrace{y_0}_{1}=(1-h)^{n+1}$$

$$y_{n+1}=(1-h)^{n+1}$$

ב) קבע עבור $h=2$ השווה בין התנהגות שקירובים ע"י סכמת F.E

לבין הפתרון האמיתי

פתרון $t\in[0,T]$ $T=nh=2n$

הפתרון האמיתי $y(T)=y(2n)=e^{-2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

אבל

$y_{n+1}=(1-h)^{n+1}=(-1)^{n+1}$

③ $|\underset{\text{קירוב}}{y_{n+1}(T)} - \underset{\text{מדויק}}{y(T)}| = |(-1)^{n+1} - e^{-2n}| \xrightarrow{n\to\infty} 1$

לכן השיטה לא מתכנסת עבור $h=2$

$\lambda=-1$ ונציב בתנאי $h < \frac{-2}{\lambda} = 2 \Leftarrow h<2$

<u>תרגיל</u> ① הוכח שהקירוב ל-$y(t)$ שמתקבל ע"י שיטת B.E

עבור אותה מד"ר מהשאלה הקודמת ניתן לכתוב ע"י $y_{n+1}=\frac{1}{(1+h)^{n+1}}$

② שוב קח $h=2$ והשווה בין מה שקיבלת בשיטת B.E לבין הפתרון האנליטי $y=e^{-t}$

<u>פתרון</u>

$$\begin{cases} y'=-y \\ y(0)=1 \end{cases} \rightarrow f(t,y)=-y$$

<u>B.E</u> $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

$$y_{n+1}=y_n+h(-y_{n+1})$$

$$(1+h)y_{n+1}=y_n$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{1+h}y_n=\frac{1}{1+h}\cdot\frac{1}{1+h}y_{n-1}=\dots=\frac{1}{(1+h)^{n+1}}\underbrace{y_0}_{1}=\frac{1}{(1+h)^{n+1}}$$

פתרון מקורב: $y_{n+1}=\frac{1}{(1+h)^{n+1}}$

פתרון אנליטי: $y(t)=e^{-t}$

② עבור $h=2$ $T=nh=2n$

$$y_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$y(t)=e^{-t} \rightarrow y(T)=e^{-T}=e^{-2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\lim_{n\to\infty}|y_{n+1}-y(T)|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-e^{-2n}\right|=0$$

שים לב שכאן נכון לכל h, וזה שונה מתנאי היציבות

של שיטת B.E עבור λ שלילי